

I. TRẮC NGHIỆM (3,0 điểm)

Câu 1. Cho hàm số $f(x) = \frac{x}{x-1}$. Hàm số đã cho gián đoạn tại

- A. $x = -1$. B. $x = 0$. C. $x = 1$. D. $x = 2$.

Câu 2. Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f'(2) = 5$ thì $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$ bằng

- A. $+\infty$. B. 5. C. 2. D. 0.

Câu 3. Cho các hàm số $u = u(x)$ và $v = v(x)$ đều có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Khẳng định nào sau đây là sai?

- A. $(u.v)' = u'.v + u.v'$. B. $(u+v)' = u' + v'$. C. $(u-v)' = u' - v'$. D. $(u.v)' = u'.v'$.

Câu 4. Đạo hàm của hàm số $y = \sin x - \cos x$ là

- A. $y' = \cos x - \sin x$. B. $y' = \cos x + \sin x$.
C. $y' = -\cos x - \sin x$. D. $y' = -\cos x + \sin x$.

Câu 5. Trên khoảng $(1; +\infty)$, hàm số $y = \sqrt{2x-2}$ có đạo hàm là

- A. $y' = \frac{-1}{\sqrt{2x-2}}$. B. $y' = \frac{2}{\sqrt{2x-2}}$. C. $y' = \frac{1}{2\sqrt{2x-2}}$. D. $y' = \frac{1}{\sqrt{2x-2}}$.

Câu 6. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^4 - 3x^2 + 4$ tại điểm $M(-1; 2)$ có hệ số góc bằng

- A. 2. B. -10. C. -2. D. 6.

Câu 7. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Khẳng định nào sau đây là sai?

- A. $(SAD) \perp (ABCD)$. B. $(SAB) \perp (ABCD)$.
C. $(SAC) \perp (ABCD)$. D. $(SBD) \perp (ABCD)$.

Câu 8. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(3) = -4$. Giới hạn $\lim_{x \rightarrow 3} [2x - f(x)]$ bằng

- A. -2. B. -10. C. 2. D. 10.

Câu 9. Xét hàm số $f(x) = \frac{x-m}{x+2}$ (m là tham số thực). Tập tất cả các giá trị của m để bất phương trình $f'(x) > 0$ luôn đúng với mọi $x \neq -2$ là

- A. $(2; +\infty)$. B. $(-\infty; 2)$. C. $(-2; +\infty)$. D. $(-\infty; -2)$.

Câu 10. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A với $AB = 2a$, cạnh bên bằng $2\sqrt{2}a$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và $B'C'$ bằng

- A. $2a$. B. $2\sqrt{2}a$. C. $a\sqrt{2}$. D. a .

Câu 11. Tại vị trí ban đầu, một chất điểm bắt đầu chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $S(t) = t^3 + 2t^2 + 3t$ (m), t là thời gian chuyển động tính bằng giây (s), $S(t)$ là quãng đường chuyển động của chất điểm theo thời gian t . Vận tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm chất điểm cách vị trí ban đầu 108 m bằng

- A. 43(m/s). B. 67(m/s). C. 59(m/s). D. 27(m/s).

Câu 12. Cho đường thẳng $\Delta: y = -x + 2023$ và hàm số $y = \frac{1}{4}x^4 - mx^3 + 2x^2 + (m^2 - 1)x + 3m$ (m là tham số) có đồ thị là đường cong (C). Nếu tiếp tuyến của đường cong (C) tại điểm có hoành độ bằng 2 vuông góc với đường thẳng Δ thì tích các giá trị của m bằng

- A. 6. B. 12. C. 14. D. 16.

II. TỰ LUẬN (7,0 điểm)

Câu 1. (1,5 điểm) Tính các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 - x}$; b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x + 2 - \sqrt{x^2 + 1}}{2x + 3}$.

Câu 2. (2,5 điểm)

1) Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = -x^3 + 3x^2 + 4x + 5$; b) $y = (1 - x) \cdot \sin x$; c) $y = \cos(\sqrt{x})$ với $x > 0$.

2) Cho hàm số $y = x^3 - 6x^2 + 3x - 5$ có đồ thị là (C). Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại giao điểm của (C) với trục tung.

Câu 3. (2,5 điểm) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi, cạnh đáy bằng $2a$ và tam giác ABC đều. Hình chiếu vuông góc của đỉnh S trên mặt phẳng (ABCD) là trung điểm H của cạnh AB . Cạnh bên $SA = \sqrt{7}a$.

- a) Chứng minh rằng $(SHC) \perp (SAB)$.
b) Tính khoảng cách từ điểm H tới mặt phẳng (SCD).
c) Tính cosin của góc giữa hai mặt phẳng (SAD) và (SCD).

Câu 4. (0,5 điểm) Cho hàm số $y = f(x) = x^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ với b, c, d, e là các hệ số thực thỏa mãn đồng thời các điều kiện $3b + 2c + d \leq -6$ và $12b + d > 4c + 33$. Tìm số nghiệm của phương trình $g'(x) = 0$, biết rằng $g(x) = f(x^2 - 2x - 1)$.

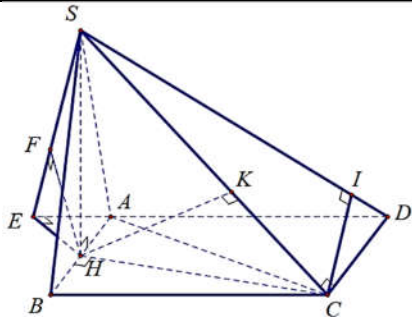
===== Hết =====

I. TRẮC NGHIỆM (3,0 điểm)

Với mỗi câu: Trả lời đúng được 0,25 điểm, trả lời sai 0 điểm.

Câu	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Đáp án	C	B	D	B	D	A	D	D	C	B	B	C

II. TỰ LUẬN (7,0 điểm)

Câu	Lời giải sơ lược	Điểm
1. (1,5 điểm)		
a)	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 - x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{x} = 2.$	0,75
b)	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x + 2 - \sqrt{x^2 + 1}}{2x + 3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 + \frac{2}{x} - \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}{2 + \frac{3}{x}} = 1.$	0,75
2. (2,5 điểm)		
1) Tính đạo hàm.		
a) $y' = -3x^2 + 6x + 4.$		0,5
b) $y' = (1-x)' \cdot \sin x + (1-x) \cdot (\sin x)' = -\sin x + (1-x) \cdot \cos x.$		0,5
c) $y' = -(\sqrt{x})' \cdot \sin(\sqrt{x}) = -\frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \sin(\sqrt{x}).$		0,5
2) Viết phương trình tiếp tuyến.		
Với $x = 0 \Rightarrow y = -5 \Rightarrow M(0; -5).$		0,25
Ta có $y' = 3x^2 - 12x + 3.$		0,25
Hệ số góc của tiếp tuyến tại M là $k = y'(0) = 3.$		0,25
Phương trình tiếp tuyến cần tìm là $y = 3(x - 0) - 5 \Leftrightarrow y = 3x - 5.$		0,25
3. (2,5 điểm)		
a) Ta có $SH \perp (ABCD) \Rightarrow SH \perp AB$ (1). Lại có ΔABC là tam giác đều nên $AB \perp HC$ (2). Từ (1), (2) $\Rightarrow AB \perp (SHC) \Rightarrow (SHC) \perp (SAB).$ (Vẽ đúng hình ý a được 0,25 điểm)		1
b) Trong mặt phẳng (SHC) dựng $HK \perp SC$ tại $K.$ Ta có $AB \perp (SHC)$ (chứng minh trên) và $AB \parallel CD$ nên $CD \perp (SHC) \Rightarrow HK \perp CD.$ Do đó $HK \perp (SCD) \Rightarrow d(H, (SCD)) = HK.$		0,5

	Ta có $HS = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \sqrt{6}a$, $HC = \sqrt{3}a$. Trong tam giác SHC ta có $\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{HS^2} + \frac{1}{HC^2} = \frac{1}{6a^2} + \frac{1}{3a^2} = \frac{1}{2a^2} \Rightarrow HK^2 = 2a^2 \Rightarrow HK = \sqrt{2}a.$ Vậy $d(H, (SCD)) = \sqrt{2}a$.	0,5
	c) Trong mặt phẳng $(ABCD)$ dựng $HE \perp AD$ tại E và $HF \perp SE$ tại F. Ta có $HE = \frac{1}{2}d(B, AD) = \frac{1}{2}d(A, BC) = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $SH = a\sqrt{6} \Rightarrow HF = \frac{\sqrt{6}a}{3}$. Chứng minh được: $d(C, (SAD)) = d(B, (SAD)) = 2d(H, (SAD)) = 2HF = \frac{2\sqrt{6}a}{3}.$	0,25
	Vì $CD \perp (SHC)$ (chứng minh trên) nên $CD \perp SC \Rightarrow \Delta SCD$ vuông tại C. Kẻ $CI \perp SD$ tại I. Tính được $CI = \frac{6\sqrt{13}}{13}a$. Ta có $\sin(\widehat{(SAD), (SCD)}) = \frac{d(C, (SAD))}{d(C, SD)} = \frac{\sqrt{78}}{9} \Rightarrow \cos(\widehat{(SAD), (SCD)}) = \frac{\sqrt{3}}{9}$. Vậy $\cos(\widehat{(SAD), (SCD)}) = \frac{\sqrt{3}}{9}$.	0,25
4. (0,5 điểm)		
	Xét hàm số $y = f(x) = x^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ có TXĐ: $D = \mathbb{R}$. Ta có $f'(x) = 4x^3 + 3bx^2 + 2cx + d$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$. Ta thấy $\begin{cases} f'(1) = 4 + 3b + 2c + d \leq -2 < 0 \\ f'(-2) = -32 + 12b - 4c + d > 1 > 0 \end{cases}$. Lại có $\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = -\infty \Rightarrow \exists i < -2: f'(i) < 0 \text{ và } \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = +\infty \Rightarrow \exists j > 1: f'(j) > 0.$ Do đó: $f'(i).f'(-2) < 0; f'(-2).f'(1) < 0; f'(1).f'(j) < 0$ nên phương trình bậc ba $f'(x) = 0$ có đúng ba nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3 với $x_1 \in (i; -2), x_2 \in (-2; 1), x_3 \in (1; j)$.	0,25
	Xét $t = x^2 - 2x - 1$ (*) thì với mỗi $t > -2$ thì phương trình (*) có 2 nghiệm phân biệt, với mỗi $t < -2$ thì phương trình (*) vô nghiệm, với $t = -2$ thì phương trình (*) có đúng 1 nghiệm $x = 1$. Ta có $g'(x) = (2x - 2)f'(x^2 - 2x - 1)$. Xét $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ f'(x^2 - 2x - 1) = 0 \end{cases} \quad (1)$ Với $x = 1 \Rightarrow$ phương trình (1) là $f'(-2) = 0$ vô lý vì $f'(-2) > 0$, do đó $x = 1$ không là nghiệm của phương trình (1).	0,25

	$\text{Phương trình (1)} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x - 1 = x_1 \text{ (2)} \\ x^2 - 2x - 1 = x_2 \text{ (3)} \\ x^2 - 2x - 1 = x_3 \text{ (4)} \end{cases}$ Phương trình (2) vô nghiệm, phương trình (3) có đúng 2 nghiệm, phương trình (4) có đúng 2 nghiệm và các nghiệm này khác nhau. Vậy phương trình $g'(x) = 0$ có đúng 5 nghiệm phân biệt.	
--	--	--

Lưu ý: Các cách giải khác đáp án, nếu đúng vẫn cho điểm theo các bước tương ứng.