

ÔN TẬP KIỂM TRA HỌC KÌ II

TOÁN 10

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT TRỌNG ĐIỂM TOÁN 10 HỌC KÌ II	trang 1
I. TAM THỨC BẬC HAI VÀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI	trang 1
II. HAI DẠNG PHƯƠNG TRÌNH QUY VỀ BẬC HAI.....	trang 3
III. QUI TẮC CỘNG VÀ QUI TẮC NHÂN.....	trang 3
IV. HOÁN VỊ, CHỈNH HỢP, TỔ HỢP	trang 5
V. NHỊ THỨC NEW-TON.....	trang 6
VI. BIẾN CỐ VÀ XÁC SUẤT CỦA BIẾN CỐ	trang 7
VII. ĐIỂM VÀ VECTƠ TRONG MẶT PHẪNG TỌA ĐỘ.....	trang 9
VIII. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG TRONG MẶT PHẪNG TỌA ĐỘ.....	trang 11
IX. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG TRÒN TRONG MẶT PHẪNG TỌA ĐỘ	trang 16
X. ELIP, HYPEBOL VÀ PARABOL.....	trang 18
B. CÁC ĐỀ MINH HỌA KIỂM TRA HỌC KÌ II TOÁN 10 NĂM HỌC 2022-2023.....	trang 21
ĐỀ SỐ 01	trang 21
ĐỀ SỐ 02	trang 22
ĐỀ SỐ 03	trang 23
ĐỀ SỐ 04	trang 24
C. HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ MINH HỌA.....	trang 25
HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ SỐ 01	trang 25
HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ SỐ 02	trang 28
HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ SỐ 03	trang 32
HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ SỐ 04	trang 35

HOÀNG XUÂN NHÀN

GIÁO VIÊN TOÁN TRƯỜNG THCS-THPT NGUYỄN KHUYẾN

TH-THCS-THPT LÊ THÁNH TÔNG

ĐỀ CƯƠNG ÔN TẬP KIỂM TRA HỌC KÌ II NĂM HỌC 2022 - 2023 TOÁN 10

A – TÓM TẮT LÝ THUYẾT TRỌNG ĐIỂM HỌC KÌ II TOÁN 10

I – TAM THỨC BẬC HAI VÀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

1. Định lý về dấu tam thức bậc hai:

☞ Cho tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$), $\Delta = b^2 - 4ac$.

□ Nếu $\Delta < 0$ thì $f(x)$ cùng dấu hệ số a với mọi $x \in \mathbb{R}$.

□ Nếu $\Delta = 0$ thì $f(x)$ cùng dấu hệ số a với mọi $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{b}{2a}\right\}$; $f(x) = 0$ khi $x = -\frac{b}{2a}$.

□ Nếu $\Delta > 0$ thì $f(x)$ cùng dấu hệ số a với mọi x thuộc các khoảng $(-\infty; x_1)$, $(x_2; +\infty)$; $f(x)$ trái dấu a với mọi x thuộc khoảng $(x_1; x_2)$; trong đó x_1, x_2 là hai nghiệm của $f(x)$ và $x_1 < x_2$.

☞ **Chú ý:** Học sinh có thể thay Δ bởi Δ' trong các trường hợp trên với $\Delta' = b'^2 - ac$, $b' = \frac{b}{2}$.

Ví dụ 1: Xét dấu các tam thức bậc hai sau:

a) $f(x) = -9x^2 + 6x - 1$;

b) $f(x) = -2x^2 + x + 3$.

Lời giải:

a) $f(x) = -9x^2 + 6x - 1$; ($a = -9, b = 6, c = -1$).

Ta có: $\Delta = b^2 - 4ac = 0$; $f(x)$ có nghiệm kép $x = 3$, ta có bảng xét dấu:

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$f(x)$	-	0	-

Khi $x \neq 3$
 $f(x)$ luôn cùng dấu a
mà $a = -9 < 0$

Kết luận: $f(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$; $f(x) = 0$ khi $x = 3$. Ta có thể nói gộp: $f(x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

b) $f(x) = -2x^2 + x + 3$; ($a = -2, b = 1, c = 3$).

Ta có: $\Delta = b^2 - 4ac = 25 > 0$; $f(x)$ có hai nghiệm phân

biệt $x_1 = -1, x_2 = \frac{3}{2}$. Ta có bảng xét dấu:

x	$-\infty$	-1	$\frac{3}{2}$	$+\infty$	
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

Trong trái, ngoài cùng

Kết luận:

$$f(x) > 0, \forall x \in \left(-1; \frac{3}{2}\right); f(x) < 0, \forall x \in (-\infty; -1) \cup \left(\frac{3}{2}; +\infty\right).$$

2. Điều kiện để tam thức bậc hai không đổi dấu trên tập số thực:

☞ Cho tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$), $\Delta = b^2 - 4ac$. Ta có:

- $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$
- $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$
- $f(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$
- $f(x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$

☞ Chú ý:

- Học sinh có thể thay Δ bởi Δ' trong các trường hợp trên với $\Delta' = b'^2 - ac$, $b' = \frac{b}{2}$.
- Trong nhiều trường hợp biểu thức được cho chưa phải tam thức bậc hai vì hệ số a chứa tham số m (hoặc tham số khác) thì ta cần xét thêm trường hợp $a = 0$ xem có thỏa mãn bài toán không, rồi sau đó mới dùng đến một trong bốn công thức trên. Kết quả bài toán là hợp các giá trị thu được trong cả hai trường hợp đã xét.

Ví dụ 2: Tìm tất cả tham số m để $f(x) = x^2 - 2mx + m^2 - m$ luôn dương với mọi x thuộc $\mathbb{R}$.

Lời giải:

Ta có: $a = 1 \neq 0$, $b = -2m$, $c = m^2 - m$.

Theo giả thiết: $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 > 0 \text{ (luôn đúng)} \\ (-2m)^2 - 4(m^2 - m) < 0 \end{cases}$
 $\Leftrightarrow 4m^2 - 4m^2 + 4m < 0 \Leftrightarrow m < 0$. Vậy với $m < 0$ thì $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

3. Ứng dụng bảng xét dấu tam thức bậc hai để giải bất phương trình:

- ☐ **Bước 1:** Tìm nghiệm (nếu có) của tam thức bậc hai.
- ☐ **Bước 2:** Lập bảng xét dấu tam thức bậc hai đó.
- ☐ **Bước 3:** Dựa vào bảng xét dấu, ta kết luận nghiệm của bất phương trình.

Ví dụ 3: Giải bất phương trình sau:

a) $2x^2 - 3x \leq 0$;

b) $-x^2 + x - \frac{4}{5} > 0$.

Lời giải:

a) Đặt $f(x) = 2x^2 - 3x$; $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{3}{2}$.

Bảng xét dấu:

Ta có: $2x^2 - 3x \leq 0 \Leftrightarrow x \in \left[0; \frac{3}{2}\right]$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là:

$S = \left[0; \frac{3}{2}\right]$.

b) Đặt $f(x) = -x^2 + x - \frac{4}{5}$; $f(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \emptyset$.

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	0	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$f(x)$	+	0	-	+

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	-	

Ta có: $x^2 - x + \frac{4}{5} > 0 \Leftrightarrow x \in \emptyset$.

II – HAI DẠNG PHƯƠNG TRÌNH QUY VỀ BẬC HAI

1. Phương trình dạng $\sqrt{A} = \sqrt{B}$:

- **Bước 1:** Bình phương hai vế phương trình, ta được phương trình $A = B$ rồi giải phương trình này.
- **Bước 2:** Thay từng nghiệm của phương trình (nếu có) ở **bước 1** vào phương trình ban đầu $\sqrt{A} = \sqrt{B}$ xem có thỏa mãn hay không rồi kết luận nghiệm phương trình ban đầu.

Ví dụ 1: Giải các phương trình sau: $\sqrt{x^2 + 5} = \sqrt{-x^2 + 3x + 7}$.

Lời giải:

Bình phương hai vế phương trình, ta được:

$$x^2 + 5 = -x^2 + 3x + 7 \Rightarrow 2x^2 - 3x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \vee x = -\frac{1}{2}.$$

Thay lần lượt các giá trị $x = 2$; $x = -\frac{1}{2}$ vào phương trình ban đầu, ta thấy chúng đều thỏa mãn.

Vậy phương trình có tập nghiệm là: $S = \left\{ 2; -\frac{1}{2} \right\}$.

2. Phương trình dạng $\sqrt{A} = B$:

- **Bước 1:** Bình phương hai vế phương trình, ta được $A = B^2$ rồi giải phương trình này.
- **Bước 2:** Thay từng nghiệm của phương trình (nếu có) ở **bước 1** vào phương trình ban đầu $\sqrt{A} = B$ xem có thỏa mãn hay không rồi kết luận nghiệm phương trình ban đầu.

Ví dụ 2: Giải phương trình sau: $\sqrt{\frac{1}{2}x^2 + x} = 4 - x$.

Lời giải:

Bình phương hai vế phương trình, ta được:

$$\frac{1}{2}x^2 + x = (4 - x)^2 \Rightarrow \frac{1}{2}x^2 + x = 16 - 8x + x^2 \Rightarrow -\frac{1}{2}x^2 + 9x - 16 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 16 \end{cases}.$$

Thay lần lượt các giá trị $x = 2$; $x = 16$ vào phương trình ban đầu, ta thấy chỉ có $x = 2$ thỏa mãn.

Vậy, tập nghiệm phương trình $S = \{2\}$.

III – QUY TẮC CỘNG VÀ QUY TẮC NHÂN

1. Quy tắc cộng:

☞ Giả sử một công việc được thực hiện theo phương án A hoặc phương án B. Phương án A có m cách thực hiện, phương án B có n cách thực hiện không trùng với bất kì cách nào của phương án A. Khi đó số cách để thực hiện công việc là: $m + n$.

Ví dụ 1: Đội I có 5 thành viên, đội II có 6 thành viên. Có bao nhiêu cách để chọn ra một người từ một trong hai đội trên để đi làm nhiệm vụ đặc biệt?

Lời giải:

Có hai phương án để chọn ra một thành viên đi làm nhiệm vụ:

Phương án A: Chọn một thành viên từ đội I: có 5 cách.

Phương án B: Chọn một thành viên từ đội II: có 6 cách.

Vậy số cách chọn một thành viên đi làm nhiệm vụ là: $5 + 6 = 11$ (cách).

2. Quy tắc nhân:

✎ Giả sử một công việc được chia thành hai giai đoạn. Giai đoạn thứ nhất có m cách thực hiện, ứng với mỗi cách thực hiện của giai đoạn thứ nhất thì giai đoạn thứ hai có n cách thực hiện. Số cách để hoàn thành công việc là $m \times n$ (cách).

Ví dụ 2: Từ thành phố A đến thành phố B có 5 con đường, từ thành phố B đến thành phố C có 3 con đường. Một người muốn di chuyển từ thành phố A đến thành phố C thì phải đi qua thành phố B. Hỏi có bao nhiêu cách để di chuyển từ thành phố A đến thành phố C.

Lời giải:

Một người đi từ thành phố A đến thành phố C cần có hai giai đoạn bắt buộc:

Giai đoạn thứ nhất: Đi từ thành phố A đến thành phố B: Có 5 cách.

Giai đoạn thứ hai: Đi từ thành phố B đến thành phố C: Có 3 cách.

Số cách hoàn thành công việc là: $5 \times 3 = 15$ (cách).

⚠️ Chú ý:

- **Quy tắc nhân** có thể được mở rộng cho nhiều hành động liên tiếp.
- **Phân biệt quy tắc cộng và quy tắc nhân:**
 Khi một công việc được thực hiện bởi nhiều giai đoạn bắt buộc (nếu thiếu một giai đoạn thì công việc không thể hoàn thành), ta sẽ dùng đến **quy tắc nhân**; trường hợp còn lại ta dùng **quy tắc cộng**.

Ví dụ 3. Có bao nhiêu số tự nhiên gồm 5 chữ số:

- Tùy ý?
- Phân biệt?
- Phân biệt và số tự nhiên đó là số lẻ?
- Phân biệt và số tự nhiên đó chẵn?

Lời giải:

- Gọi số tự nhiên cần tìm: $\overline{abcde}$ với a, b, c, d, e là các số lấy từ tập $\{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$.

Chọn a khác 0: có 9 cách.

Vì các số được chọn là tùy ý nên số cách chọn mỗi chữ số b, c, d, e đều là 10 (cách).

Vậy số các số tự nhiên thỏa mãn: $9 \cdot 10^4 = 90000$ (số).

- Gọi số tự nhiên cần tìm: $\overline{abcde}$.

Chọn a : $a \neq 0 \Rightarrow$ Có 9 cách chọn a .

Chọn b : $b \neq a \Rightarrow$ Có 9 cách chọn b .

Theo quy luật trên thì số cách chọn c, d, e lần lượt là 8, 7, 6. Vậy số các số tự nhiên thỏa mãn: $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 27216$ (số).

- Gọi số tự nhiên cần tìm: $\overline{abcde}$.

Chọn $e \in \{1; 3; 5; 7; 9\} \Rightarrow$ Có 5 cách chọn e .

Chọn a với $a \neq 0, a \neq e \Rightarrow$ Có 8 cách chọn a .

Mỗi chữ số b, c, d lần lượt có 8, 7, 6 cách chọn.

Vậy số các số tự nhiên thỏa mãn: $5 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 13440$ (số)

d) ☺ **Cách giải 1:****Trường hợp 1:** $e = 0$.Chọn a khác 0 (tức là a cũng khác e): có 9 cách chọn.Mỗi chữ số b, c, d lần lượt có 8, 7, 6 cách chọn. Khi đó, ta có được: $1.9.8.7.6 = 3024$ (số).**Trường hợp 2:** $e \in \{2; 4; 6; 8\}$. Chọn e : có 4 cách chọn.Chọn a với $a \neq 0, a \neq e$, ta có 8 cách chọn.Mỗi chữ số b, c, d lần lượt có 8, 7, 6 cách chọn. Khi đó ta có được: $4.8.8.7.6 = 10752$ (số).Vậy số các số tự nhiên thỏa mãn: $3024 + 10752 = 13776$ (số).☺ **Cách giải 2:**

Số các số tự nhiên gồm 5 chữ số phân biệt là 27 216 (số).

Số các số tự nhiên lẻ gồm 5 chữ số phân biệt là 13 440 (số).

Theo quy tắc loại trừ, số các số tự nhiên chẵn gồm 5 chữ số phân biệt: $27\,216 - 13\,440 = 13\,776$ (số).**IV – HOÁN VỊ, CHỈNH HỢP, TỔ HỢP****1. Hoán vị:**☞ Cho tập X có n phần tử ($n \geq 1$). Mỗi cách sắp xếp n phần tử của tập X theo một thứ tự được gọi là một **hoán vị** của n phần tử đó.☞ **Kí hiệu:** P_n là số các hoán vị của n phần tử.Khi đó: $P_n = n! = n(n-1)(n-2)\dots 2.1$; với $n!$ được đọc là n giai thừa.**Quy ước:** $0! = 1$.📌 **Lưu ý:** Hai hoán vị của n phần tử chỉ khác nhau về thứ tự sắp xếp.**Ví dụ 1:** Có 5 người cùng tham gia một trò chơi và được xếp vào 5 vị trí cho trước, hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp?**Lời giải:**Số cách xếp 5 người vào 5 vị trí cho sẵn là: $P_5 = 5! = 5.4\dots 2.1 = 120$ (cách).**2. Chỉnh hợp:**☞ Cho tập X có n phần tử ($n \geq 1$). Mỗi cách ra lấy k phần tử của tập X ($1 \leq k \leq n$) và sắp xếp chúng theo một thứ tự được gọi là một **chỉnh hợp** chập k của n phần tử đã cho.☞ **Kí hiệu:** A_n^k là số **chỉnh hợp** chập k của n phần tử.Khi đó: $A_n^k = n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$.📌 **Lưu ý:** Số hoán vị của n phần tử cũng chính là số **chỉnh hợp** chập n của n phần tử đó. Tức là: $P_n = A_n^n = n!$.**Ví dụ 2:** Có bao nhiêu cách chọn ra 5 học sinh từ lớp học 30 học sinh để bầu vào các vị trí lớp trưởng và tổ trưởng của các tổ 1, 2, 3, 4 (giả sử cả 30 em trong lớp đều có khả năng được chọn như nhau)?**Lời giải:**Số cách chọn ra 5 học sinh thỏa mãn đề bài chính là số chỉnh hợp chập 5 của 30 phần tử, ta có: $A_{30}^5 = 17\,100\,720$ cách chọn.

3. Tổ hợp:

☞ Cho tập X có n phần tử ($n \geq 1$). Mỗi cách lấy ra k phần tử của tập X ($1 \leq k \leq n$) được gọi là một tổ hợp chập k của n phần tử đã cho.

☞ **Kí hiệu:** C_n^k là số **tổ hợp** chập k của n phần tử.

$$\text{Khi đó: } C_n^k = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Ví dụ 3: Một đội đặc nhiệm có 5 thành viên nam và 3 thành viên nữ. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ra 2 thành viên đi làm nhiệm vụ đặc biệt?

Lời giải:

Số cách chọn ra 2 thành viên từ 8 thành viên của đội là: $C_8^2 = 28$.

☞ **Nhận xét:** Ta có quy ước và một số tính chất sau:

$$\begin{aligned} \bullet C_n^0 &= 1 & \bullet C_n^k &= \frac{A_n^k}{k!} \\ \bullet C_n^k &= C_n^{n-k} \quad (0 \leq k \leq n) & \bullet C_n^k + C_n^{k+1} &= C_{n+1}^{k+1} \quad (0 < k < n) \end{aligned}$$

Ví dụ 4. Rút gọn :

$$\text{a) } A = \frac{7! \cdot 4!}{10!} \left(\frac{8!}{3!5!} - \frac{6!}{2!4!} \right); \quad \text{b) } B = \frac{P_{n+2}}{A_n^k \cdot P_{n-k}} + \frac{C_{15}^5}{C_{15}^7}.$$

Lời giải:

$$\text{a) } A = \frac{7! \cdot 4!}{10!} \left(\frac{8!}{3!5!} - \frac{6!}{2!4!} \right) = \frac{7! \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{7! \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10} \left(\frac{5! \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5!} - \frac{4! \cdot 5 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 4!} \right) = \frac{1}{30} (56 - 15) = \frac{41}{30}.$$

$$\begin{aligned} \text{b) } B &= \frac{P_{n+2}}{A_n^k \cdot P_{n-k}} + \frac{C_{15}^5}{C_{15}^7} = \frac{(n+2)!}{\frac{n!}{(n-k)!} \cdot (n-k)!} + \frac{\frac{15!}{5!10!}}{\frac{15!}{7!8!}} = \frac{n!(n+1)(n+2)}{n!} + \frac{8!7!}{10!5!} \\ &= (n+1)(n+2) + \frac{8!5!6 \cdot 7}{8!9 \cdot 10 \cdot 5!} = n^2 + 3n + 2 + \frac{6 \cdot 7}{9 \cdot 10} = n^2 + 3n + \frac{37}{15}. \end{aligned}$$

V – NHỊ THỨC NEWTON**1. Công thức nhị thức Newton:**

☞ Với n là một số nguyên dương, người ta chứng minh được công thức khai triển biểu thức $(a+b)^n$ như sau: $(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \dots + C_n^k a^{n-k} b^k + \dots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n$ (*).

☞ Với mỗi giá trị $n \in \{2; 3\}$, ta có được các hằng đẳng thức đáng nhớ:

$$\bullet \text{ Với } n=2 \text{ thì: } (a+b)^2 = C_2^0 a^2 b^0 + C_2^1 a^1 b^1 + C_2^2 a^0 b^2 = a^2 + 2ab + b^2;$$

$$(a-b)^2 = C_2^0 a^2 (-b)^0 + C_2^1 a^1 (-b)^1 + C_2^2 a^0 (-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

• Với $n=3$ thì:

$$(a+b)^3 = C_3^0 a^3 b^0 + C_3^1 a^2 b^1 + C_3^2 a^1 b^2 + C_3^3 a^0 b^3 = a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3;$$

☞ **Biến cố chắc chắn** là biến cố luôn xảy ra, kí hiệu là Ω .

☞ **Biến cố không thể** là biến cố không bao giờ xảy ra, ta kí hiệu là $\emptyset$.

☞ **Biến cố đối** của A , được kí hiệu là $\bar{A}$ với $\bar{A} = \Omega \setminus A$.

Ví dụ 3: Gieo con súc sắc hai lần, hãy mô tả các biến cố sau và trong mỗi trường hợp, hãy cho biết có bao nhiêu kết quả thuận lợi của biến cố đó?

- Số chấm thu được từ hai con súc sắc là giống nhau.
- Tổng số chấm thu được lớn hơn 8.

Lời giải:

- Gọi A là biến cố “Số chấm thu được từ hai con súc sắc là giống nhau”.

Ta có: $A = \{(1;1), (2;2), (3;3), (4;4), (5;5), (6;6)\}$.

Số kết quả thuận lợi của A là 6.

- Gọi B là biến cố “Tổng số chấm thu được lớn hơn 8”.

Ta có: $B = \{(4;5), (5;4), (5;5), (5;6), (6;5), (6;6)\}$.

Số kết quả thuận lợi của B là 6.

Ví dụ 4: Trong một chiếc hộp có 6 bi xanh và 4 bi đỏ. Lấy ngẫu nhiên 2 viên bi từ hộp.

- Xác định số phần tử của không gian mẫu.
- Tìm số kết quả thuận lợi của biến cố A : “Lấy được 1 bi xanh và 1 bi đỏ”.

Lời giải:

- Phép thử là chọn ngẫu nhiên 2 bi từ hộp đựng 10 bi nên số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = C_{10}^2 = 45$.

- Số kết quả thuận lợi của A là $n(A) = C_6^1 \times C_4^1 = 24$.

2. Xác suất của biến cố:

☞ Trong một phép thử chỉ có một số hữu hạn các kết quả đồng khả năng xảy ra, xác suất của biến cố

A được kí hiệu là $P(A)$ và được tính theo công thức $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$, trong đó $n(A)$, $n(\Omega)$ theo

thứ tự là số phần tử của A và của không gian mẫu.

☞ **Một số tính chất:**

- $P(\emptyset) = 0$, $P(\Omega) = 1$.
- $0 \leq P(A) \leq 1$, với mọi biến cố A .
- $P(A) = 1 - P(\bar{A})$, trong đó A và $\bar{A}$ là hai biến cố đối nhau.

Ví dụ 1: Gieo con súc sắc một lần, tìm xác suất để số chấm thu được là một số nguyên tố.

Lời giải:

Mô tả không gian mẫu: $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$. Suy ra: $n(\Omega) = 6$.

Mô tả biến cố A : “Số chấm thu được là một số nguyên tố” là $A = \{2; 3; 5\}$.

Suy ra $n(A) = 3$. Vậy xác suất để biến cố A xảy ra là $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Ví dụ 2: Từ một hộp đựng 6 bi xanh và 5 bi vàng, lấy ngẫu nhiên 4 viên bi, tính xác suất các biến cố:

- a) A: “Lấy được 4 viên bi cùng màu”.
 b) B: “Lấy được 4 viên bi luôn có đủ hai màu”.
 c) C: “Lấy được 4 viên bi luôn có bi màu vàng”.

Lời giải:

- a) Ta có: $n(\Omega) = C_{11}^4$. Biến cố A xảy ra khi ta lấy được cả 4 bi xanh hoặc cả 4 bi vàng. Suy ra $n(A) = C_6^4 + C_5^4$.

$$\text{Xác suất để A xảy ra là: } P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{C_6^4 + C_5^4}{C_{11}^4} = \frac{2}{33}.$$

- b) Ta thấy B là biến cố đối của A, vì vậy $P(B) = 1 - P(A) = 1 - \frac{2}{33} = \frac{31}{33}$.

- c) Xét biến cố đối của C là $\bar{C}$: “Lấy được 4 viên bi không có màu vàng”.

$$\text{Ta có: } n(\bar{C}) = C_6^4. \text{ Suy ra } P(C) = 1 - P(\bar{C}) = 1 - \frac{C_6^4}{C_{11}^4} = \frac{21}{22}.$$

VII – ĐIỂM VÀ VECTƠ TRONG MẶT PHẪNG TỌA ĐỘ

1. Tọa độ vectơ:

☞ Vectơ $\vec{u}$ có tọa độ $(x_0; y_0)$ khi và chỉ khi $\vec{u} = x_0\vec{i} + y_0\vec{j}$.

☞ Tọa độ các vectơ đơn vị: $\vec{i} = (1; 0)$, $\vec{j} = (0; 1)$.

☞ Tọa độ của vectơ không: $\vec{0} = (0; 0)$.

☞ Cho hai vectơ $\vec{u} = (x; y)$, $\vec{v} = (x'; y')$, ta có:

- $\vec{u} + \vec{v} = (x + x'; y + y')$
- $\vec{u} - \vec{v} = (x - x'; y - y')$
- $k\vec{u} = (kx; ky)$, $k \in \mathbb{R}$
- $\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}$
- $\vec{u}$ cùng phương với $\vec{v} \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}, \vec{u} = k\vec{v} \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = kx' \\ y = ky' \end{cases} \Leftrightarrow \frac{x}{x'} = \frac{y}{y'}$ với $x'y' \neq 0$.

Ví dụ 1: Cho các vectơ $\vec{u}, \vec{v}$ được biểu diễn như sau: $\vec{u} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$, $\vec{v} = \vec{i} + \vec{j}$ và $\vec{a} = (2m - 1; n + 2)$.

- a) Xác định tọa độ các vectơ $\vec{u}, \vec{v}$; b) Tìm tọa độ $\vec{u} + \vec{v}, \vec{u} - 2\vec{v}$;
 c) Hai vectơ $\vec{u}, \vec{v}$ có cùng phương? d) Tìm cặp số m, n sao cho $\vec{a} = \vec{u}$.

Lời giải:

- a) Ta có: $\vec{u} = (2; -3)$, $\vec{v} = (1; 1)$.

- b) Ta có: $\vec{u} + \vec{v} = (2 + 1; -3 + 1) = (3; -2)$; $\vec{u} - 2\vec{v} = (2 - 2.1; -3 - 2.1) = (0; -5)$.

- c) ☺ **Cách 1:** $\vec{u}, \vec{v}$ cùng phương $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}, \vec{u} = k\vec{v} \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}, \begin{cases} 2 = k.1 \\ -3 = k.1 \end{cases} \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}, \begin{cases} k = 2 \\ k = -3 \end{cases}$ (vô lí).

Vậy hai vectơ $\vec{u}, \vec{v}$ không cùng phương.

☉ **Cách 2:** Ta có: $\frac{2}{1} \neq \frac{-3}{1} \Rightarrow$ Hai vectơ $\vec{u}, \vec{v}$ không cùng phương.

$$d) \vec{a} = \vec{u} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m-1=2 \\ n+2=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=\frac{3}{2} \\ n=-5 \end{cases}. \text{ Vậy } m=\frac{3}{2}, n=-5 \text{ thỏa mãn đề bài.}$$

2. Tọa độ điểm:

☞ Một điểm M có tọa độ $(x_M; y_M) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = (x_M; y_M) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = x_M \vec{i} + y_M \vec{j}$.

☞ Với hai điểm $A(x_A; y_A), B(x_B; y_B)$ thì $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A)$.

☞ Trọng hệ trục tọa độ Oxy , gốc tọa độ O có tọa độ $(0;0)$ hay $O(0;0)$.

☞ Cho hai điểm $A(x_A; y_A), B(x_B; y_B)$. Tọa độ trung điểm I của đoạn AB thỏa mãn:

$$x_I = \frac{x_A + x_B}{2}, y_I = \frac{y_A + y_B}{2}.$$

☞ Cho tam giác ABC với $A(x_A; y_A), B(x_B; y_B), C(x_C; y_C)$. Tọa độ trọng tâm G của tam giác thỏa

$$\text{mãn: } x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}, y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}.$$

Ví dụ 2: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai điểm $A(2; -1), B(1; 8)$.

a) Tìm tọa độ trung điểm I của đoạn AB , tọa độ trọng tâm G của $\triangle OAB$.

b) Tìm tọa độ điểm C sao cho $OABC$ là hình bình hành.

Lời giải:

$$a) \text{ Tọa độ điểm } I: x_I = \frac{2+1}{2} = \frac{3}{2}, y_I = \frac{-1+8}{2} = \frac{7}{2} \text{ hay } I\left(\frac{3}{2}; \frac{7}{2}\right).$$

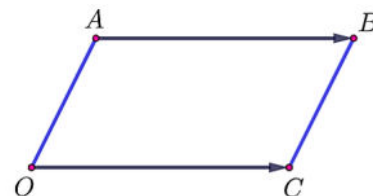
$$\text{Tọa độ điểm } G: x_G = \frac{0+2+1}{3} = 1, y_G = \frac{0-1+8}{3} = \frac{7}{3} \text{ hay } G\left(1; \frac{7}{3}\right).$$

b) Gọi tọa độ điểm C là $(x_C; y_C)$.

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{AB} = (-1; 9), \overrightarrow{OC} = (x_C; y_C).$$

$$OABC \text{ là hình bình hành} \Leftrightarrow \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{AB}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_C = -1 \\ y_C = 9 \end{cases}. \text{ Vậy } C(-1; 9).$$



3. Biểu thức tọa độ của tích vô hướng và ứng dụng:

☞ Trong mặt phẳng Oxy , cho hai vectơ $\vec{u} = (x; y), \vec{v} = (x'; y')$, tích vô hướng của hai vectơ $\vec{u}, \vec{v}$ được cho bởi công thức: $\vec{u} \cdot \vec{v} = x.x' + y.y'$.

☐ **Ứng dụng tích vô hướng tính độ dài:**

☞ Nếu $\vec{u} = (x; y)$ thì độ dài vectơ $\vec{u}$ là $|\vec{u}| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

☞ Nếu $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$ thì $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

▣ Ứng dụng tích vô hướng để tìm góc:

Với hai vectơ khác $\vec{0}$ là $\vec{u} = (x; y)$, $\vec{v} = (x'; y')$, ta có:

$$\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{x \cdot x' + y \cdot y'}{\sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sqrt{x'^2 + y'^2}}. \quad \text{☞ } \vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow x \cdot x' + y \cdot y' = 0.$$

Ví dụ 3: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho $A(0; -1)$, $B(2; 0)$, $C(1; -3)$.

- a) Chứng tỏ tam giác ABC vuông cân và tìm diện tích tam giác đó.
b) Tìm $\cos ABC$ theo hai cách.

Lời giải:

- a) Ta có: $\overrightarrow{AB} = (2; 1)$, $\overrightarrow{AC} = (1; -2)$; $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-2) = 0 \Rightarrow \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$ (1).

$$\text{Mặt khác: } AB = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}, AC = \sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{5} \Rightarrow AB = AC \text{ (2).}$$

Từ (1) và (2) suy ra tam giác ABC vuông cân tại A . $\square$

$$\text{Diện tích tam giác: } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{5} = \frac{5}{2} \text{ (đơn vị diện tích).}$$

- b) ☺ **Cách 1:** Ta có $\triangle ABC$ vuông cân tại A nên $\cos ABC = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

$$\text{☺ **Cách 2:** Ta có: } \overrightarrow{BA} = (-2; -1) \Rightarrow BA = \sqrt{5}, \overrightarrow{BC} = (-1; -3) \Rightarrow BC = \sqrt{10}.$$

$$\text{Do vậy: } \cos ABC = \cos(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{BA \cdot BC} = \frac{(-2) \cdot (-1) + (-1) \cdot (-3)}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{10}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

VIII – PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG TRONG MẶT PHẪNG TỌA ĐỘ

1. Phương trình tổng quát của đường thẳng:

- ☞ Vectơ $\vec{n}$ khác $\vec{0}$ được gọi là vectơ pháp tuyến của đường thẳng Δ nếu giá của nó vuông góc với đường thẳng Δ .
☞ Một đường thẳng hoàn toàn được xác định nếu ta biết được một điểm thuộc đường thẳng và một vectơ pháp tuyến của nó.
☞ Phương trình tổng quát của đường thẳng Δ đi qua $M(x_0; y_0)$ có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (a; b)$ là:
$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0.$$

Thu gọn phương trình, ta được: $ax + by + c = 0$ với $c = -ax_0 - by_0$.

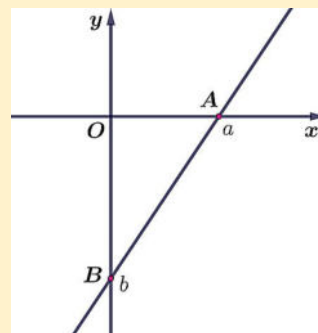
Ví dụ 1: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , viết phương trình tổng quát của đường thẳng Δ biết rằng Δ qua $A(1; -3)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (2; 1)$.

Lời giải:

$$\text{Phương trình tổng quát } \Delta \text{ là: } 2(x - 1) + 1(y + 3) = 0 \text{ hay } \Delta: 2x + y + 1 = 0.$$

🔍 Nhận xét:

- Mọi đường thẳng đều có phương trình tổng quát dạng $ax + by + c = 0$ với a, b không đồng thời bằng 0 (hay $a^2 + b^2 > 0$); ngược lại thì mỗi phương trình dạng $ax + by + c = 0$ ($a^2 + b^2 > 0$) luôn là phương trình của một đường thẳng nhận $\vec{n} = (a; b)$ làm vector pháp tuyến.
- Nếu đường thẳng Δ chắn các trục tọa độ Ox, Oy lần lượt tại hai điểm $A(a; 0), B(0; b), ab \neq 0$ thì Δ có phương trình theo đoạn chắn là: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$. Quy đồng bỏ mẫu, ta đưa về dạng tổng quát: $bx + ay - ab = 0$.
- Nếu đường thẳng Δ qua điểm $M(x_0; y_0)$, có hệ số góc k thì phương trình Δ là: $y = k(x - x_0) + y_0$. Ta đưa được phương trình về dạng tổng quát như sau: $kx - y + c = 0$ với $c = -kx_0 + y_0$.



Ví dụ 2: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , viết phương trình tổng quát của đường thẳng Δ biết rằng Δ chắn các trục Ox, Oy lần lượt tại $A(2; 0), B(0; -3)$.

Lời giải:

Phương trình Δ theo đoạn chắn là: $\frac{x}{2} + \frac{y}{-3} = 1$; vậy phương trình tổng quát của Δ : $3x - 2y - 6 = 0$.

2. Phương trình tham số của đường thẳng:

- Vector $\vec{u}$ khác $\vec{0}$ được gọi là một vector chỉ phương của đường thẳng Δ nếu giá của nó song song hoặc trùng với đường thẳng Δ .
- Hai vector chỉ phương và pháp tuyến của một đường thẳng thì luôn vuông góc nhau. Nếu $\vec{n} = (a; b)$ là một vector pháp tuyến của đường thẳng Δ thì $\vec{u}_1 = (b; -a), \vec{u}_2 = (-b; a)$ là các vector chỉ phương của Δ . (Suy luận tương tự khi ta biết trước một vector chỉ phương của một đường thẳng).
- Nếu Δ có vector chỉ phương là $\vec{u} = (a; b)$ với $a \neq 0$ thì hệ số góc của Δ là $k = \frac{b}{a}$. Ngược lại, nếu Δ có hệ số góc là k thì Δ có vector chỉ phương là $\vec{u} = (1; k)$.
- Một đường thẳng hoàn toàn xác định nếu ta biết được một điểm thuộc đường thẳng và một vector chỉ phương của nó.
- Phương trình tham số của đường thẳng Δ đi qua điểm $M(x_0; y_0)$ và có vector chỉ phương $\vec{u} = (a; b)$ là:
$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases} \quad (t \text{ là tham số}).$$

Ví dụ 3: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , viết phương trình tham số của đường thẳng Δ biết rằng Δ qua điểm $A(1; -3)$, có vector chỉ phương $\vec{u} = (5; -2)$.

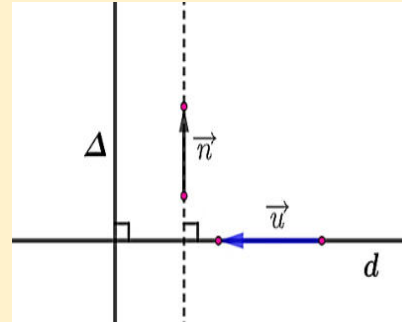
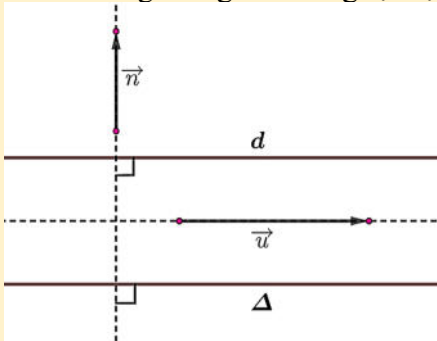
Lời giải:

Phương trình tham số của Δ là:
$$\begin{cases} x = 1 + 5t \\ y = -3 - 2t \end{cases}$$

3. Hai đường thẳng song song hoặc vuông góc nhau:

- Hai đường thẳng song song nhau có thể sử dụng chung một vector pháp tuyến hoặc một vector chỉ phương.

☞ Nếu hai đường thẳng vuông góc nhau thì vector chỉ phương của đường thẳng này là vector pháp tuyến của đường thẳng kia và ngược lại



Ví dụ 4. Viết phương trình tham số của đường thẳng Δ biết rằng :

- Δ qua $A(-1; -2)$ và song song với đường thẳng $d: x - 3y + 1 = 0$.
- Δ qua gốc tọa độ và vuông góc với đường thẳng $d: 2x + 2y - 3 = 0$.
- Δ qua $B(2; -3)$ và vuông góc với đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -4t \end{cases}$.

Lời giải:

- Δ song song với d nên có chung một vector pháp tuyến là $\vec{n} = (1; -3)$, suy ra Δ có một vector chỉ phương $\vec{u} = (3; 1)$.

Vậy phương trình tham số $\Delta: \begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = -2 + t \end{cases}$.

- Δ vuông góc với $d: 2x + 2y - 3 = 0$ nên có một vector chỉ phương là $\vec{u} = (1; 1)$, phương trình tham số $\Delta: \begin{cases} x = t \\ y = t \end{cases}$.

- Δ vuông góc với $d: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -4t \end{cases}$ nên có một vector pháp tuyến là $\vec{n} = (1; -4)$, suy ra có một vector chỉ phương $\vec{u} = (4; 1)$.

Phương trình tham số $\Delta: \begin{cases} x = 2 + 4t \\ y = -3 + t \end{cases}$.

4. Vị trí tương đối giữa hai đường thẳng:

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , xét hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 lần lượt có các vector pháp tuyến $\vec{n}_1, \vec{n}_2$.

Trường hợp 1: Nếu $\vec{n}_1$ cùng phương với $\vec{n}_2$. Khi đó Δ_1, Δ_2 song song hoặc trùng nhau.

- Chọn điểm M tùy ý thuộc Δ_1 , nếu $M \in \Delta_2$ thì Δ_1 và Δ_2 trùng nhau.
- Chọn điểm M tùy ý thuộc Δ_1 , nếu $M \notin \Delta_2$ thì Δ_1, Δ_2 song song nhau.

Trường hợp 2: Nếu $\vec{n}_1$ không cùng phương với $\vec{n}_2$ thì ta kết luận ngay hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 cắt nhau, tọa độ giao điểm giữa chúng là nghiệm của hệ phương trình của hai đường thẳng đó.

Lưu ý:

- Ta có thể sử dụng cặp vector chỉ phương $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ của hai đường thẳng để xét vị trí tương đối giữa hai đường thẳng đó tương tự như các trường hợp trên.
- Nếu $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$ thì $\vec{n}_1 \perp \vec{n}_2$ hay hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 vuông góc nhau (đây là trường hợp đặc biệt khi hai đường thẳng cắt nhau).

Nhận xét: Ta có thể xét vị trí tương đối hai đường thẳng bằng cách đi giải hệ hai phương trình tổng quát của hai đường thẳng đó, giả sử là
$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases} \quad (*)$$

- Nếu hệ (*) có một nghiệm $\begin{cases} x = x_0 \\ y = y_0 \end{cases}$ thì Δ_1 và Δ_2 cắt nhau tại $(x_0; y_0)$.
- Nếu hệ (*) vô nghiệm thì Δ_1 và Δ_2 song song nhau.
- Nếu hệ (*) có vô số nghiệm thì Δ_1 và Δ_2 trùng nhau.

Ví dụ 5: Xác định vị trí tương đối của hai đường thẳng d_1 và d_2 (cho biết tọa độ giao điểm nếu chúng cắt nhau) biết rằng:

a) $d_1: 2x - y + 4 = 0, d_2: x - 2 = 0;$ b) $d_1: x - y - 3 = 0, d_2: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 + 2t \end{cases}$

Lời giải:

a) Hai đường thẳng lần lượt có vector pháp tuyến là $\vec{n}_1 = (2; -1), \vec{n}_2 = (1; 0)$.

Ta có $2 \cdot 0 \neq -1 \cdot 1$ nên hai vector này không cùng phương, suy ra hai đường thẳng d_1 và d_2 cắt nhau.

Mặt khác, giải hệ $\begin{cases} 2x - y + 4 = 0 \\ x - 2 = 0 \end{cases}$, ta được $\begin{cases} x = 2 \\ y = 8 \end{cases}$.

Vậy tọa độ giao điểm của hai đường d_1, d_2 là $(2; 8)$.

b) Đường thẳng d_1 có vector pháp tuyến $\vec{n}_1 = (1; -1)$, đường thẳng d_2 có vector chỉ phương là $\vec{u}_2 = (2; 2)$ nên có một vector pháp tuyến $\vec{n}_2 = (1; -1)$.

Ta có: $1(-1) = -1 \cdot 1$ nên hai vector $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ cùng phương với nhau.

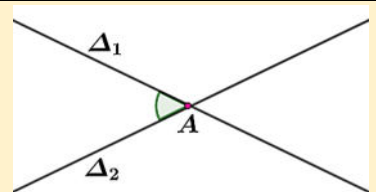
Mặt khác, lấy điểm $A(3; 0) \in d_1$, thay tọa độ A vào phương trình $d_2: \begin{cases} 3 = 1 + 2t \\ 0 = 3 + 2t \end{cases} \Leftrightarrow t \in \emptyset$; nghĩa là $A(3; 0) \notin d_2$. Vậy d_1, d_2 song song nhau.

5. Góc giữa hai đường thẳng:

☞ Cho hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 cắt nhau tại A thì chúng tạo thành bốn góc có đỉnh là A.

- Nếu Δ_1, Δ_2 không vuông góc nhau thì góc giữa chúng là góc nhọn trong bốn góc tạo thành.
- Nếu Δ_1, Δ_2 vuông góc nhau thì góc giữa chúng bằng 90° .

Góc giữa hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 được kí hiệu là (Δ_1, Δ_2) hay $(\widehat{\Delta_1, \Delta_2})$.



Lưu ý:

— Góc giữa hai đường thẳng luôn thuộc đoạn $[0^\circ; 90^\circ]$.

— Nếu hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 song song hoặc trùng nhau thì ta nói góc giữa chúng bằng 0° .

☞ Cho hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 lần lượt có các vector pháp tuyến là

$\vec{n}_1 = (a_1; b_1), \vec{n}_2 = (a_2; b_2)$. Khi đó cosin góc tạo bởi hai đường thẳng

$$\text{đó là: } \cos(\Delta_1, \Delta_2) = \left| \cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2) \right| = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|} = \frac{|a_1 a_2 + b_1 b_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2}}.$$

📌 **Lưu ý:** Ta có thể sử dụng cặp vector chỉ phương của hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 để thay vào công thức trên vẫn tìm được góc giữa hai đường thẳng đó.

Ví dụ 3: Cho hai đường thẳng $d_1: y = 3x - 1$ và $d_2: \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 5 + 2t \end{cases}$. Tìm góc giữa hai đường thẳng trên.

Lời giải:

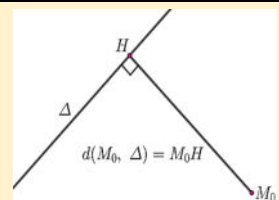
Từ phương trình $d_1: 3x - y - 1 = 0$, ta tìm được một vector pháp tuyến của nó là $\vec{n}_1 = (3; -1)$; d_2 có một vector chỉ phương $\vec{u}_2 = (-1; 2)$ nên có một vector pháp tuyến $\vec{n}_2 = (2; 1)$.

$$\text{Do vậy: } \cos(d_1, d_2) = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|} = \frac{|3 \cdot 2 + (-1) \cdot 1|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow (d_1, d_2) = 45^\circ.$$

6. Khoảng cách điểm đến đường thẳng:

☞ Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , khoảng cách từ điểm $M_0(x_0; y_0)$ đến đường thẳng $\Delta: ax + by + c = 0$ có kí hiệu $d(M_0, \Delta)$, được tính bởi

$$\text{công thức: } d(M_0, \Delta) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$



Ví dụ 4:

a) Tính khoảng cách từ điểm $A(2; -3)$ đến đường thẳng Δ có phương trình $3x - 4y - 1 = 0$.

b) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng d_1, d_2 biết $d_1: x - y + 3 = 0$ và $d_2: 2x - 2y + 1 = 0$.

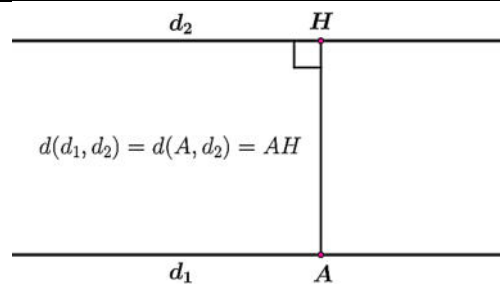
Lời giải:

$$\text{a) Ta có: } d(A, \Delta) = \frac{|3 \cdot 2 - 4(-3) - 1|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{17}{5}.$$

b) Hai đường thẳng d_1, d_2 lần lượt có vector pháp tuyến $\vec{n}_1 = (1; -1), \vec{n}_2 = (2; -2)$ với $1(-2) = -1 \cdot 2$ nên hai vector này cùng phương.

Mặt khác điểm $A(0;3) \in d_1, A \notin d_2$. Vì vậy hai đường thẳng d_1, d_2 song song nhau. Khi đó khoảng cách giữa hai đường thẳng d_1, d_2 cũng là khoảng cách từ một điểm bất kỳ trên đường thẳng này đến đường thẳng còn lại.

Ta có: $d(d_1, d_2) = d(A, d_2) = \frac{|2 \cdot 0 - 2 \cdot 3 + 1|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2}} = \frac{5\sqrt{2}}{4}$.



IX – PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG TRÒN TRONG MẶT PHẪNG TỌA ĐỘ

1. Phương trình đường tròn:

☞ Trong mặt phẳng Oxy , tập hợp tất cả điểm M cách đều điểm I cho trước một khoảng R không đổi được gọi là đường tròn tâm I , bán kính R .

☞ Cho trước điểm $I(a; b)$ và số thực dương R . Điểm $M(x; y)$ thỏa mãn

$$IM = R \Leftrightarrow \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = R \Leftrightarrow (x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2 \quad (1).$$

• (1) là phương trình đường tròn có tâm $I(a; b)$, bán kính R .

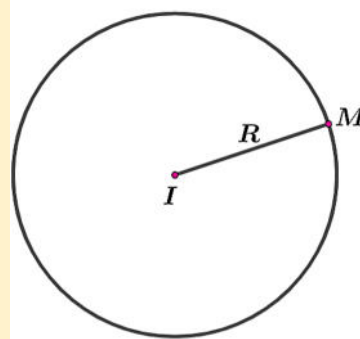
• Khai triển (1): $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2ax - 2by + \underbrace{a^2 + b^2 - R^2}_c = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0 \quad (2).$$

(2) cũng là một dạng của phương trình đường tròn (dạng khai triển), trong đó $c = a^2 + b^2 - R^2$ hay $R = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$.

☞ **Lưu ý:** Phương trình dạng $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ là một phương trình đường tròn nếu

$$a^2 + b^2 - c > 0.$$



Ví dụ 1: Tìm tọa độ tâm I và bán kính R đường tròn (C) biết:

a) $(C): (x-1)^2 + (y-2)^2 = 14$; b) $(C): x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$.

Lời giải:

a) Đường tròn (C) có tâm $I(1; 2)$, bán kính $R = \sqrt{14}$.

b) Đặt $a = \frac{2}{-2} = -1, b = \frac{-4}{-2} = 2, c = 1$. Đường tròn (C) có tâm $I(-1; 2)$, bán kính

$$R = \sqrt{a^2 + b^2 - c} = \sqrt{1 + 4 - 1} = 2.$$

Ví dụ 2: Viết phương trình đường tròn (C) trong các trường hợp sau :

a) (C) có tâm $I(-1; -7)$ và bán kính $R = 3\sqrt{3}$.

b) (C) có tâm $I(1; -5)$ và đi qua $O(0; 0)$.

c) (C) nhận AB làm đường kính với $A(1; 1), B(7; 5)$.

Lời giải:

a) Phương trình $(C): (x+1)^2 + (y+7)^2 = 27$.

b) (C) có bán kính $R = OI = \sqrt{(1-0)^2 + (-5-0)^2} = \sqrt{26}$ nên có phương trình $(x-1)^2 + (y+5)^2 = 26$.

c) Gọi I là trung điểm của đoạn $AB \Rightarrow I(4;3); AI = \sqrt{(4-1)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{13}$.

Đường tròn (C) có đường kính là AB suy ra (C) nhận $I(4;3)$ làm tâm và bán kính $R = AI = \sqrt{13}$ nên có phương trình là $(x-4)^2 + (y-3)^2 = 13$.

2. Vị trí tương đối điểm với đường tròn, đường thẳng với đường tròn:

☞ Xét điểm A với đường tròn (C) có tâm I , bán kính R .

- A **nằm trên** đường tròn $\Leftrightarrow IA = R$.
- A **nằm bên trong** đường tròn $\Leftrightarrow IA < R$.
- A **nằm bên ngoài** đường tròn $\Leftrightarrow IA > R$.

☞ Xét đường thẳng Δ với đường tròn (C) có tâm I , bán kính R .

- $d(I, \Delta) = R \Leftrightarrow \Delta$ **tiếp xúc** với (C) (Δ được gọi là **tiếp tuyến** của đường tròn, vị trí tiếp xúc giữa chúng được gọi là **tiếp điểm**).
- $d(I, \Delta) > R \Leftrightarrow \Delta$ và (C) **không có điểm chung**.
- $d(I, \Delta) < R \Leftrightarrow \Delta$ và (C) **cắt nhau tại hai điểm** phân biệt (Δ được gọi là một **cát tuyến** của đường tròn).

Ví dụ 3: Cho đường tròn (C): $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$ có tâm I và đường thẳng

$$\Delta: \sqrt{2}x + my + 1 - \sqrt{2} = 0.$$

- Tìm m để đường thẳng Δ cắt đường tròn (C) tại hai điểm phân biệt A, B .
- Tìm m để diện tích tam giác IAB là lớn nhất.

Lời giải:

a) Đường tròn (C) có tâm $I(1; -2)$, bán kính $R = 3$.

Δ cắt (C) tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi $d(I, \Delta) < R$

$$\Leftrightarrow \frac{|\sqrt{2} - 2m + 1 - \sqrt{2}|}{\sqrt{2 + m^2}} < 3$$

$$\Leftrightarrow |1 - 2m| \leq 3\sqrt{2 + m^2}$$

$$\Leftrightarrow 4m^2 - 4m + 1 \leq 9m^2 + 18$$

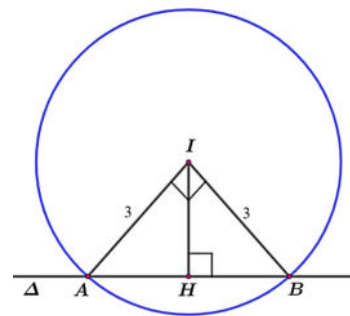
$$\Leftrightarrow 5m^2 + 4m + 17 > 0 \text{ (đúng với mọi } m).$$

Vậy với mọi số thực m thì Δ cắt đường tròn (C) tại hai điểm phân biệt.

b) Ta có: $S_{\Delta IAB} = \frac{1}{2} IA \cdot IB \cdot \sin AIB = \frac{9}{2} \sin AIB \leq \frac{9}{2}$ (vì $\sin AIB \leq 1$).

Suy ra: $(S_{\Delta IAB})_{\max} = \frac{9}{2}$; khi đó $\sin AIB = 1 \Leftrightarrow AIB = 90^\circ$

Gọi H là hình chiếu của I lên $\Delta \Rightarrow AIH = 45^\circ \Rightarrow IH = IA \cdot \cos 45^\circ = \frac{3}{\sqrt{2}}$

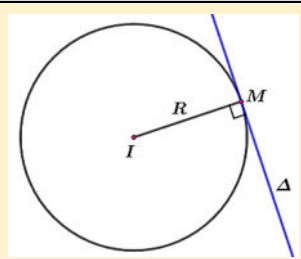


Ta có: $d(I, \Delta) = IH \Leftrightarrow \frac{|1-2m|}{\sqrt{2+m^2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow m^2 + 8m + 16 = 0 \Leftrightarrow m = -4.$

Vậy $m = -4$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

3. Tiếp tuyến của đường tròn:

- ☞ Xét đường tròn (C) tâm I , bán kính R , tiếp tuyến Δ của (C) tại M là đường thẳng qua M và nhận $\overrightarrow{IM}$ làm một vector pháp tuyến.
- ☞ Xét đường tròn $(C): (x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$. Tiếp tuyến Δ của (C) tại $M(x_0; y_0)$ có phương trình: $(x_0 - a)(x - a) + (y_0 - b)(y - b) = R^2$.



Ví dụ 4: Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn $(C): x^2 + (y-3)^2 = 13$ tại điểm $M(2;0)$.

Lời giải:

Đường tròn có tâm $I(0;3)$, bán kính $R = \sqrt{13}$.

😊 **Cách giải 1:**

Gọi Δ là tiếp tuyến cần tìm, Δ qua M và nhận $\overrightarrow{IM} = (2; -3)$ làm vector pháp tuyến nên có phương trình: $2(x-2) - 3(y-0) = 0$ hay $\Delta: 2x - 3y - 4 = 0$.

😊 **Cách giải 2:**

Phương trình tiếp tuyến của $(C): x^2 + (y-3)^2 = 13$ tại $M(2;0)$ là:

$$x_M x + (y_M - 3)(y - 3) = 13 \Leftrightarrow 2x + (0 - 3)(y - 3) - 13 = 0 \Leftrightarrow 2x - 3y - 4 = 0.$$

X – ELIP, HYPEBOL, PARABOL

1. Elip và phương trình chính tắc elip:

- ☞ Cho hai điểm cố định F_1, F_2 có độ dài $F_1F_2 < 2a$ (với a dương không đổi); elip (E) là tập hợp tất cả điểm M thỏa mãn $MF_1 + MF_2 = 2a$.
 - Các điểm F_1, F_2 được gọi là **tiêu điểm** của elip.
 - Độ dài $F_1F_2 = 2c$ được gọi là **tiêu cự** của elip ($c < a$).
- ☞ **Phương trình chính tắc** của elip có dạng $(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ với $a > b > 0, a^2 = b^2 + c^2$.
 - Các **tiêu điểm** elip là $F_1(-c;0), F_2(c;0)$. **Tiêu cự:** $F_1F_2 = 2c$.
 - Các **đỉnh trên trục lớn** là: $A_1(-a;0), A_2(a;0)$. **Độ dài trục lớn** là $A_1A_2 = 2a$.
 - Các **đỉnh trên trục bé** là $B_1(0;-b), B_2(0;b)$. **Độ dài trục bé** là $B_1B_2 = 2b$.

- Gốc tọa độ O được gọi là **tâm đối xứng** của elip.

- Tâm sai**: $e = \frac{c}{a}$; ta luôn có $0 < e < 1$.

- Điểm $M(x; y) \in (E)$ thì $|x| \leq a, |y| \leq b$.

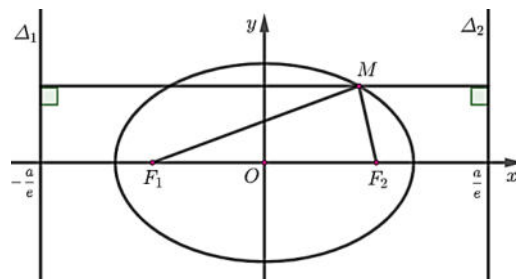
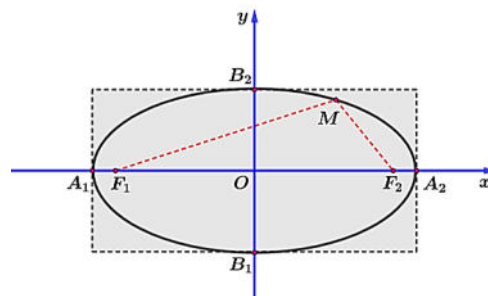
Ta có: $MF_1 = a + \frac{c}{a}x, MF_2 = a - \frac{c}{a}x$.

- Bốn đường thẳng $x = \pm a, y = \pm b$ tạo thành một **hình chữ nhật cơ sở** của elip (E) . Hình chữ nhật có chiều dài là $2a$ và chiều rộng là $2b$.

- Phương trình các **đường chuẩn**: $\Delta_1: x + \frac{a}{e} = 0$ là đường chuẩn ứng với tiêu điểm F_1 ; $\Delta_2: x - \frac{a}{e} = 0$ là đường chuẩn ứng với tiêu điểm F_2 .

Bất kì điểm M nào thuộc elip đều thỏa mãn:

$$\frac{MF_1}{d(M; \Delta_1)} = \frac{MF_2}{d(M; \Delta_2)} = e.$$



Ví dụ 1: Viết phương trình chính tắc của elip (E) biết rằng:

a) (E) có độ dài hai trục lần lượt là 10 và 8.

b) (E) đi qua hai điểm $M\left(1; \frac{4\sqrt{2}}{3}\right), N\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}; 1\right)$.

Lời giải:

a) Gọi phương trình chính tắc của elip là $(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ với $a > b > 0$.

Ta có: $2a = 10 \Rightarrow a = 5; 2b = 8 \Rightarrow b = 4$.

Vậy phương trình chính tắc elip là $(E): \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.

b) Gọi phương trình chính tắc của elip là $(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ với $a > b > 0$.

$$(E) \text{ qua hai điểm } M\left(1; \frac{4\sqrt{2}}{3}\right), N\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}; 1\right) \text{ nên } \begin{cases} \frac{1}{a^2} + \frac{32}{9b^2} = 1 \\ \frac{27}{4a^2} + \frac{1}{b^2} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{a^2} = \frac{1}{9} \\ \frac{1}{b^2} = \frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow a^2 = 9, b^2 = 4.$$

Vậy phương trình chính tắc elip là $(E): \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$.

2. Hypebol và phương trình chính tắc của Hypebol:

☞ Cho hai điểm cố định F_1, F_2 có độ dài $F_1F_2 > 2a$ (với a dương không đổi); hypebol (H) là tập hợp tất cả điểm M thỏa mãn $|MF_1 - MF_2| = 2a$.

- Các điểm F_1, F_2 được gọi là **tiêu điểm** của hypebol.
- Độ dài $F_1F_2 = 2c$ được gọi là **tiêu cự** của hypebol ($c > a$).

☞ **Phương trình chính tắc** của một hypebol là (H): $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ với $a, b, c > 0$ và $c^2 = a^2 + b^2$.

- Các **tiêu điểm** của hypebol là $F_1(-c; 0), F_2(c; 0)$. **Tiêu cự** là $F_1F_2 = 2c$.
- Các **đỉnh trên trục thực** là $A_1(-a; 0), A_2(a; 0)$.

Độ dài trục thực là $A_1A_2 = 2a$.

- Các **đỉnh trục ảo** là $B_1(0; -b), B_2(0; b)$.

Độ dài trục ảo là $B_1B_2 = 2b$.

- Góc tọa độ O được gọi là **tâm đối xứng** của hypebol (H).
- Điểm $M(x; y) \in (H)$ thì $|x| \geq a$; đồng thời

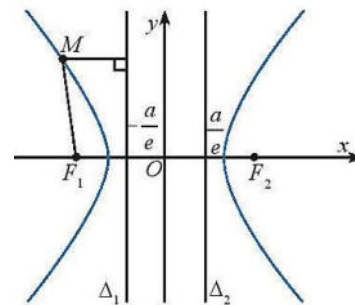
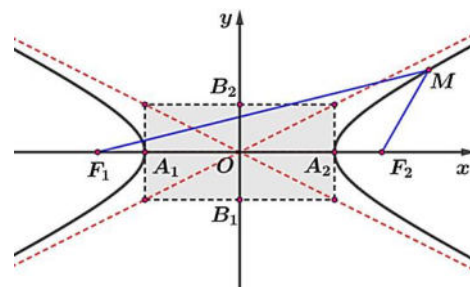
$$MF_1 = |a + ex_M| = \left| a + \frac{c}{a} x_M \right|, MF_2 = |a - ex_M| = \left| a - \frac{c}{a} x_M \right|.$$

- Hình chữ nhật tạo bởi các đường thẳng $x = \pm a, y = \pm b$ gọi là **hình chữ nhật cơ sở**. Hai đường thẳng chứa hai đường chéo của hình chữ nhật cơ sở được gọi là hai **đường tiệm cận** của hypebol và có phương trình là $y = \pm \frac{b}{a} x$.

- **Tâm sai**: $e = \frac{c}{a} > 1$.

- Phương trình các **đường chuẩn**: $\Delta_1: x + \frac{a}{e} = 0$ là đường chuẩn ứng với tiêu điểm F_1 ; $\Delta_2: x - \frac{a}{e} = 0$ là đường chuẩn ứng với tiêu điểm F_2 .

Bất kì điểm M nào thuộc elip đều thỏa mãn: $\frac{MF_1}{d(M; \Delta_1)} = \frac{MF_2}{d(M; \Delta_2)} = e$.



Ví dụ 2: Tìm tọa độ tiêu điểm, tiêu cự, tọa độ các đỉnh trên trục thực, độ dài trục thực, tọa độ đỉnh trên trục ảo, độ dài trục ảo của hypebol (H) có phương trình chính tắc (H): $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{1} = 1$.

Lời giải:

Ta có: $\begin{cases} a^2 = 4 \\ b^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases}; c^2 = a^2 + b^2 = 5 \Rightarrow c = \sqrt{5}.$

Tọa độ các tiêu điểm của (H): $F_1(-\sqrt{5}; 0), F_2(\sqrt{5}; 0)$; tiêu cự $F_1F_2 = 2\sqrt{5}$.

Tọa độ các đỉnh trên trục thực: $A_1(-2; 0), A_2(2; 0)$; độ dài trục thực $A_1A_2 = 4$.

Tọa độ các đỉnh trên trục ảo: $B_1(0; -1)$, $B_2(0; 1)$; độ dài trục ảo $B_1B_2 = 2$.

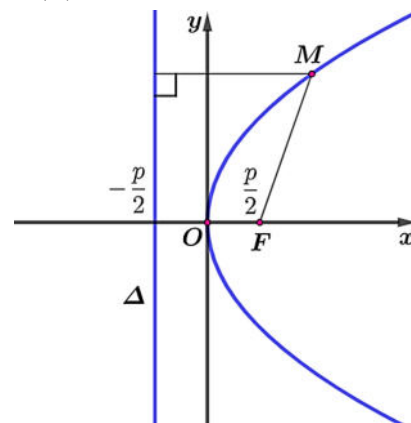
3. Parabol và phương trình chính tắc của parabol:

☞ Cho một điểm F cố định và một đường thẳng Δ cố định không đi qua F ; parabol (P) là tập hợp tất cả điểm M cách đều F và Δ .

Điểm F được gọi là tiêu điểm, Δ được gọi là đường chuẩn của parabol (P) .

☞ Phương trình chính tắc của parabol (P) có dạng $y^2 = 2px$ với $p > 0$. Trong đó:

- p được gọi là tham số tiêu.
- Tiêu điểm của (P) là $F\left(\frac{p}{2}; 0\right)$.
- Phương trình đường chuẩn của (P) là $\Delta: x = -\frac{p}{2}$.
- Đỉnh của (P) là gốc tọa độ O .
- Trục đối xứng của (P) là trục Ox .
- Nếu điểm $M(x; y) \in (P)$ thì $x \geq 0$ và điểm $M'(x; -y) \in (P)$.
- Tâm sai: $e = \frac{FM}{d(M, \Delta)} = 1$ (tâm sai của parabol luôn bằng 1).
- Bán kính qua tiêu điểm: $MF = x_M + \frac{p}{2}$ với $M(x_M; y_M)$.



Ví dụ 3: Xác định tham số tiêu, phương trình đường chuẩn, tiêu điểm của parabol (P) biết rằng $(P): y^2 = 4x$.

Lời giải:

Phương trình chính tắc của parabol $(P): y^2 = 2px \Rightarrow 2p = 4 \Rightarrow p = 2$.

Phương trình đường chuẩn $(P): x = -1$. Tiêu điểm của $(P): F(1; 0)$.

B – CÁC ĐỀ MINH HỌA KIỂM TRA HỌC KÌ II NĂM HỌC 2022 – 2023

ĐỀ SỐ 01

Câu 1. (1,5 điểm) Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt{x^2 + 2x + 4} = \sqrt{2 - x}$; b) $\sqrt{3x^2 - 9x + 1} = x - 2$.

Câu 2. (1,5 điểm) Cho $f(x) = (m + 4)x^2 - (m - 1)x + 1 + 2m$ (m là tham số).

a) Giải bất phương trình $f(x) > 0$ khi $m = -3$.

b) Tìm tất cả giá trị m để phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm.

Câu 3. (1,5 điểm) Từ một nhóm 30 học sinh lớp 12 gồm 15 học sinh khối A, 10 học sinh khối B và 5 học sinh khối C, cần chọn ra 15 học sinh, hỏi có bao nhiêu cách chọn sao cho:

a) Số học sinh mỗi khối là bằng nhau ?

b) Có ít nhất 5 học sinh khối A và có đúng 2 học sinh khối C?

Câu 4. (1,0 điểm) Cho sáu chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5. Từ sáu chữ số trên có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên, mỗi số có bốn chữ số khác nhau và không chia hết cho 5?

Câu 5. (1,0 điểm) Lấy ngẫu nhiên một thẻ từ hộp 30 thẻ được đánh số từ 1 đến 30.

a) Tính xác suất để thẻ được lấy ghi một số nguyên tố.

b) Tính xác suất để thẻ được lấy ghi một số không chia hết cho 5.

Câu 6. (1,5 điểm) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có $A(-1;4), B(-3;-2), C(4;1)$

a) Viết phương trình tổng quát của đường thẳng AB . Tính diện tích tam giác ABC

b) Viết phương trình đường tròn (C) đi qua 2 điểm A, B và có tâm nằm trên đường thẳng $\Delta: 2x+3y+4=0$.

Câu 7. (1,0 điểm) Viết phương trình chính tắc của elip (E) , biết (E) đi qua điểm $A\left(\sqrt{3}; \frac{1}{2}\right)$ và có phương trình một đường chéo của hình chữ nhật cơ sở của (E) là $x-2y=0$.

Câu 8. (1,0 điểm) Một cái tháp làm nguội của một nhà máy có mặt cắt là hình hypebol có phương trình $\frac{x^2}{28^2} - \frac{y^2}{42^2} = 1$. Biết chiều cao của tháp là 150 m và khoảng cách từ nóc tháp đến tâm đối xứng của hypebol bằng $\frac{2}{3}$ lần khoảng cách từ tâm đối xứng đến đáy. Tính bán kính nóc và bán kính đáy của tháp.



ĐỀ SỐ 02

Câu 1. (1,5 điểm) Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt{x^2 - x - 2} = \sqrt{-x^2 + 2x + 3}$;

b) $(x-2)\sqrt{2x^2 + 4} = x^2 - 4$

Câu 2. (1,0 điểm) Giải bất phương trình $\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x} + 1 > 0$.

Câu 3. (1,0 điểm) Tìm tất cả tham số m để $f(x) = x^2 - 2mx + m^2 - m$ luôn dương với mọi x thuộc $\mathbb{R}$.

Câu 4. (1,5 điểm) Có 3 cuốn sách lý, 4 cuốn sách sinh, 5 cuốn sách địa. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp các cuốn sách trên vào giá sách hàng ngang nếu:

a) Sắp xếp tùy ý?

b) Các cuốn sách cùng môn học đứng cạnh nhau?

Câu 5. (1,5 điểm) Cho $\left(1 - \frac{1}{2}x\right)^5 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5$.

a) Tìm hệ số lớn nhất trong tất cả hệ số $a_0, a_1, \dots, a_5$.

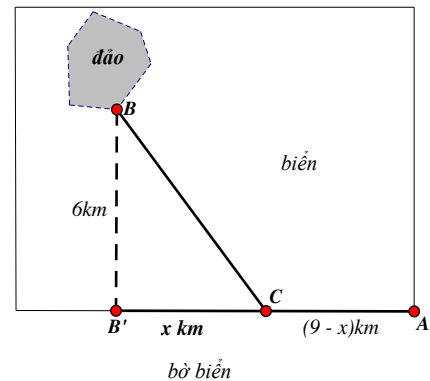
b) Tính tổng $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$.

Câu 6. (1,5 điểm) Cho họ đường tròn $(C_m): x^2 + y^2 + 4mx + 2(m+1)y - 1 = 0$.

- Tìm m để (C_m) đi qua điểm $A(1;0)$.
- Chứng minh rằng (C_m) luôn là đường tròn với mọi số thực m . Tìm bán kính bé nhất của đường tròn (C_m) .

Câu 7. (1,0 điểm) Cho hai đường thẳng $d_1: \begin{cases} x = t \\ y = -2 + 2t \end{cases}$, $d_2: x + y + 3 = 0$. Viết phương trình tham số đường thẳng d qua điểm $M(3;0)$, đồng thời cắt hai đường thẳng d_1, d_2 tại hai điểm A, B sao cho M là trung điểm của đoạn AB .

Câu 8. (1,0 điểm) Một công ty muốn làm một đường ống dẫn từ một điểm A trên bờ đến một điểm B trên một hòn đảo theo lộ trình từ A đến C (đường bờ biển) rồi từ C đến B (dưới nước) như hình vẽ. Hòn đảo cách bờ biển 6 km. Giá để xây đường ống trên bờ là 50000 USD mỗi km, giá để xây đường ống dưới nước là 130000 USD mỗi km; B' là điểm trên bờ biển sao cho BB' vuông góc với bờ biển. Khoảng cách từ A đến B' là 9 km. Biết rằng chi phí làm đường ống này là 1170000 USD. Hỏi vị trí C cách vị trí A bao nhiêu km?



ĐỀ SỐ 03

Câu 1. (1,5 điểm) Giải các phương trình sau:

- $\sqrt{2x^2 + 5} = \sqrt{x^2 - x + 11}$;
- $\sqrt{5x+10} = 8-x$.

Câu 2. (1,0 điểm) Tìm tất cả tham số m để $f(x) = mx^2 - 2x + m$ luôn âm với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Câu 3. (1,5 điểm)

- Cho tập hợp $A = \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$. Có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên chẵn có bốn chữ số khác nhau?
- Cho hai đường thẳng d_1 và d_2 song song với nhau. Trên d_1 có 10 điểm phân biệt, trên d_2 có n điểm phân biệt ($n \geq 2$). Biết rằng có 2800 tam giác mà đỉnh của chúng là các điểm nói trên. Tìm n .

Câu 4. (1,0 điểm) Xét biểu thức $(x+2y)^3 + (2x-y)^3$. Viết khai triển biểu thức trên bằng nhị thức Newton và tìm tổng các hệ số của số hạng mà lũy thừa của x lớn hơn lũy thừa của y .

Câu 5. (1,0 điểm) Gieo đồng thời hai con súc sắc cân đối đồng chất. Tính xác suất để:

- Tổng số chấm thu được từ hai con súc sắc bằng 6.
- Tích số chấm trên hai con súc sắc là một số chính phương.

Câu 6. (1,5 điểm)

- Tìm góc giữa hai đường thẳng d_1, d_2 biết rằng: $d_1: 2x - y - 10 = 0$ và $d_2: x - 3y + 9 = 0$.
- Viết phương trình đường thẳng d song song với $\Delta: x + 4y - 2 = 0$ và cách điểm $A(-2; 3)$ một khoảng bằng 3.

Câu 7. (1,5 điểm) Cho elip có phương trình chính tắc $(E): \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$.

a) Tìm tọa độ các tiêu điểm F_1, F_2 và tiêu cự, tâm sai của elip.

b) Tìm tọa độ điểm M thuộc (E) sao cho $MF_1 - MF_2 = 2$.

Câu 8. (1,0 điểm) Người ta làm ra một cái thang bắc lên tầng hai của một ngôi nhà (hình vẽ), muốn vậy họ cần làm một thanh đỡ BC có chiều dài bằng 4 m, đồng thời muốn đảm bảo kỹ thuật thì tỉ số độ dài $\frac{CE}{BD} = \frac{5}{3}$. Hỏi vị trí A cách vị trí B bao nhiêu mét?

ĐỀ SỐ 04

Câu 1. (1,5 điểm) Giải phương trình:

a) $\sqrt{x+2} = \sqrt{3x^2 - x + 1}$;

b) $\sqrt{7x+11} + x + 1 = 0$.

Câu 2. (1,0 điểm) Chứng minh phương trình sau luôn vô nghiệm dù m lấy bất kì giá trị nào:
 $x^2 - 2(m+1)x + 2m^2 + m + 3 = 0$.

Câu 3. (1,5 điểm) Một đoàn tàu nhỏ có 3 toa khách đỗ ở sân ga, các toa đều trống và mỗi toa có thể chứa được nhiều hơn 3 người. Có 3 hành khách không quen biết cùng bước lên tàu. Hỏi có bao nhiêu khả năng trong đó:

a) Khách lên tàu tùy ý;

b) Mỗi khách lên một toa;

c) Có 2 hành khách cùng lên một toa, hành khách thứ ba thì lên toa khác?

Câu 4. (1,5 điểm) Xét biểu thức $(x+1)^5$.

a) Viết khai triển biểu thức trên bằng nhị thức Newton theo thứ tự lũy thừa của x tăng dần.

b) Chứng minh rằng: $C_5^0 + C_5^1 + C_5^2 + C_5^3 + C_5^4 + C_5^5 = 2^5$.

Câu 5. (1,0 điểm) Kết quả $(b; c)$ của việc gieo con súc sắc cân đối và đồng chất hai lần, trong đó b là số chấm xuất hiện trong lần gieo đầu, c là số chấm xuất hiện ở lần gieo thứ hai, được thay vào phương trình bậc hai $x^2 + bx + c = 0$. Tính xác suất để phương trình trên có nghiệm.

Câu 6. (1,0 điểm) Viết phương trình tham số của đường thẳng Δ biết Δ là đường trung trực của đoạn thẳng AB với $A(3;1), B(-3;5)$.

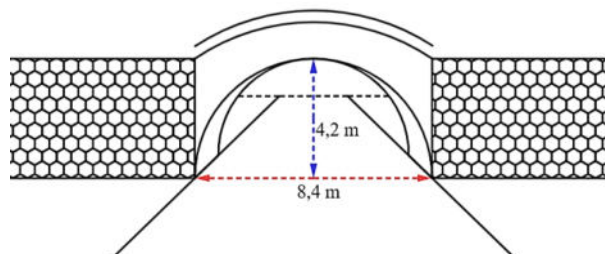
Câu 7. (1,0 điểm) Cho điểm M nằm trên hyperbol $(H): \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$. Nếu hoành độ điểm M bằng 8 thì

khoảng cách từ M đến các tiêu điểm của (H) là bao nhiêu?

Câu 8. (1,5 điểm) Một cái cổng hình bán nguyệt rộng 8,4 m, cao 4,2 m như hình vẽ. Mặt đường dưới cổng được chia làm hai làn cho xe ra vào.

a) Viết phương trình mô phỏng cái cổng.

b) Một chiếc xe tải rộng 2,2m, cao 2,6 m đi đúng làn đường quy định có thể đi qua cổng mà không làm hư hỏng cổng hay không?



C – HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ MINH HỌA KIỂM TRA HỌC KÌ II – NĂM HỌC 2022 – 2023**ĐỀ SỐ 01****Câu 1. (1,5 điểm)** Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt{x^2 + 2x + 4} = \sqrt{2 - x}$; b) $\sqrt{3x^2 - 9x + 1} = x - 2$.

Hướng dẫn giải:

a) Bình phương hai vế phương trình, ta được:

$$x^2 + 2x + 4 = 2 - x \Rightarrow x^2 + 3x + 2 = 0 \Rightarrow x = -1 \vee x = -2.$$

Thay các giá trị $x = -1$, $x = -2$ vào phương trình ban đầu, ta thấy chúng đều thỏa mãn.Vậy, tập nghiệm phương trình là $S = \{-1; -2\}$.

b) Bình phương hai vế phương trình, ta được:

$$3x^2 - 9x + 1 = x^2 - 4x + 4 \Rightarrow 2x^2 - 5x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3 \vee x = -\frac{1}{2}.$$

Thay các giá trị $x = 3$, $x = -\frac{1}{2}$ vào phương trình ban đầu, ta thấy chỉ có $x = 3$ thỏa mãn.Vậy tập nghiệm phương trình: $S = \{3\}$.**Câu 2. (1,5 điểm)** Cho $f(x) = (m+4)x^2 - (m-1)x + 1 + 2m$ (m là tham số).a) Giải bất phương trình $f(x) > 0$ khi $m = -3$.b) Tìm tất cả giá trị m để phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm.**Hướng dẫn giải:**a) Với $m = -3$, ta có bất phương trình $x^2 + 4x - 5 > 0$.Vì tam thức bậc hai $x^2 + 4x - 5$ có hai nghiệm phân biệt là 1 và -5; đồng thời $a = 1 > 0$ nên $x^2 + 4x - 5 > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -5) \cup (1; +\infty)$.Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = (-\infty; -5) \cup (1; +\infty)$.b) Ta có: $a = m + 4$, $b = -(m - 1)$, $c = 1 + 2m$.**Trường hợp 1:** $a = m + 4 = 0 \Rightarrow m = -4$. Thay vào phương trình: $5x - 7 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{7}{5}$ (có nghiệm).Do đó: $m = -4$ thỏa mãn.**Trường hợp 2:** $a = m + 4 \neq 0 \Rightarrow m \neq -4$.Phương trình có nghiệm khi $\Delta = (m-1)^2 - 4(m+4)(1+2m) \geq 0 \Leftrightarrow -7m^2 - 38m - 15 \geq 0$.

$$\Leftrightarrow -5 \leq m \leq -\frac{3}{7}.$$

Kết hợp cả hai trường hợp trên, ta có được $m \in \left[-5; -\frac{3}{7}\right]$ thỏa mãn đề bài.

Câu 3. (1,5 điểm) Từ một nhóm 30 học sinh lớp 12 gồm 15 học sinh khối A, 10 học sinh khối B và 5 học sinh khối C, cần chọn ra 15 học sinh, hỏi có bao nhiêu cách chọn sao cho:

- Số học sinh mỗi khối là bằng nhau ?
- Có ít nhất 5 học sinh khối A và có đúng 2 học sinh khối C?

Hướng dẫn giải:

- Số cách chọn 5 học sinh mỗi khối (A, B, C) lần lượt là: $C_{15}^5, C_{10}^5, C_5^5$.

Vậy số cách chọn thỏa mãn là $C_{15}^5 \times C_{10}^5 \times C_5^5 = 756756$ (cách).

- Ta sử dụng quy tắc loại trừ như lời giải sau:

Xét bài toán 1: Chọn 2 học sinh khối C, 13 học sinh khối B hoặc khối A: có $C_5^2 C_{25}^{13}$ cách.

Xét bài toán 2: Chọn 2 học sinh khối C, 13 học sinh khối B và khối A không thỏa yêu cầu.

• **Trường hợp 1:** Chọn 2 học sinh khối C, 10 học sinh khối B và 3 học sinh khối A có $C_5^2 C_{10}^{10} C_{15}^3$ cách.

• **Trường hợp 2:** Chọn 2 học sinh khối C, 9 học sinh khối B và 4 học sinh khối A có $C_5^2 C_{10}^9 C_{15}^4$ cách.

Vậy số cách chọn thỏa mãn là $C_5^2 C_{25}^{13} - C_{10}^{10} C_{15}^3 - C_{10}^9 C_{15}^4 = 51861950$ (cách).

Câu 4. (1,0 điểm) Cho sáu chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5. Từ sáu chữ số trên có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên, mỗi số có bốn chữ số khác nhau và không chia hết cho 5?

Hướng dẫn giải:

Số có bốn chữ số có dạng $\overline{abcd}$. Đặt $E = \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$.

Do $\overline{abcd}$ không chia hết cho 5 nên có 4 cách chọn d (một trong các số: 1, 2, 3, 4).

Chọn $a \in E \setminus \{0; d\}$ nên có 4 cách chọn a .

Chọn $b \in E \setminus \{a; d\}$ nên có 4 cách chọn b .

Chọn $c \in E \setminus \{a; b; d\}$ nên có 3 cách chọn c .

Theo quy tắc nhân ta có: $4.4.4.3 = 192$ số tự nhiên thỏa mãn.

Câu 5. (1,0 điểm) Lấy ngẫu nhiên một thẻ từ hộp 30 thẻ được đánh số từ 1 đến 30.

- Tính xác suất để thẻ được lấy ghi một số nguyên tố.
- Tính xác suất để thẻ được lấy ghi một số không chia hết cho 5.

Hướng dẫn giải:

Không gian mẫu là $\Omega = \{1; 2; \dots; 30\} \Rightarrow n(\Omega) = 30$.

Gọi A là biến cố “Thẻ được lấy ghi một số nguyên tố” và B là biến cố “Thẻ được lấy ghi một số không chia hết cho 5”.

- Ta có: $A = \{2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23; 29\} \Rightarrow n(A) = 10$. Suy ra $P(A) = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$.

- Từ không gian mẫu, có 6 số tự nhiên chia hết cho 5 là 5, 10, 15, 20, 25, 30. Vì vậy có 24 số tự nhiên không chia hết cho 5, hay $n(B) = 24$.

Ta có: $P(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{24}{30} = \frac{4}{5}$.

Câu 6. (1,5 điểm) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có $A(-1; 4), B(-3; -2), C(4; 1)$

- a) Viết phương trình tổng quát của đường thẳng AB . Tính diện tích tam giác ABC
 b) Viết phương trình đường tròn (C) đi qua 2 điểm A, B và có tâm nằm trên đường thẳng $\Delta: 2x + 3y + 4 = 0$.

Hướng dẫn giải:

a) AB có vector chỉ phương $\overrightarrow{AB} = (-2; -6)$ nên có vector pháp tuyến $\vec{n} = (3; -1)$

Phương trình tổng quát $AB: 3(x+1) - (y-4) = 0 \Leftrightarrow 3x - y + 7 = 0$.

$$d(C, AB) = \frac{|3 \cdot 4 - 1 + 7|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2}} = \frac{9\sqrt{10}}{5}; AB = 2\sqrt{10}; S_{ABC} = \frac{1}{2} d(C, AB) \cdot AB = 18.$$

b) Gọi phương trình $(C): x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ với $a^2 + b^2 - c > 0$.

Đường tròn này có tâm $I(a; b)$

$$\text{Do } A, B \in (C) \text{ và } I \in \Delta \text{ nên ta có hệ phương trình: } \begin{cases} 2a - 8b + c = -17 \\ 6a + 4b + c = -13 \\ 2a + 3b = -4 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình trên, tìm được $(a; b; c) = (-5; 2; 9)$.

Vậy phương trình đường tròn $x^2 + y^2 + 10x - 4y + 9 = 0$.

Câu 7. (1,0 điểm) Viết phương trình chính tắc của elip (E) , biết (E) đi qua điểm $A\left(\sqrt{3}; \frac{1}{2}\right)$ và có phương trình một đường chéo của hình chữ nhật cơ sở của (E) là $x - 2y = 0$.

Hướng dẫn giải:

Gọi phương trình chính tắc elip là $(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ với $a > b > 0$.

$$\text{Ta có: } A\left(\sqrt{3}; \frac{1}{2}\right) \in (E) \Rightarrow \boxed{\frac{3}{a^2} + \frac{1}{4b^2} = 1} \quad (1).$$

Đường chéo hình chữ nhật có phương trình $x - 2y = 0 \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x$, suy ra $\frac{b}{a} = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{a = 2b} \quad (2)$

Thay (2) vào (1): $\frac{3}{4b^2} + \frac{1}{4b^2} = 1 \Rightarrow b = 1 \Rightarrow a = 2$. Vậy phương trình chính tắc: $\boxed{(E): \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1}$.

Câu 8. (1,0 điểm) Một cái tháp làm ngòi của một nhà máy có mặt cắt là hình hypebol có phương trình $\frac{x^2}{28^2} - \frac{y^2}{42^2} = 1$. Biết chiều cao của tháp là 150 m và khoảng cách từ nóc tháp đến tâm đối xứng của hypebol bằng $\frac{2}{3}$ lần khoảng cách từ tâm đối xứng đến đáy. Tính bán kính nóc và bán kính đáy của tháp.



Hướng dẫn giải:

Chọn hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ.

$$\text{Ta có: } \begin{cases} HK = 150 \\ OH = \frac{2}{3}OK \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} OH + OK = 150 \\ OH = \frac{2}{3}OK \end{cases} \Rightarrow OH = 60 \text{ m}, OK = 90 \text{ m}.$$

Đường thẳng qua H , vuông góc Oy là $\Delta_1: y = 60$.

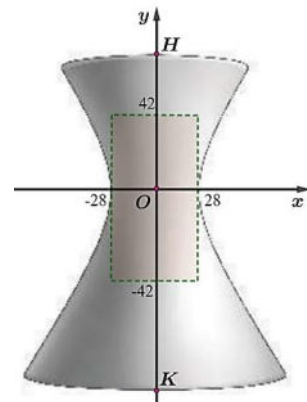
Δ_1 cắt hypebol tại điểm có hoành độ dương và thỏa mãn

$$\frac{x^2}{28^2} - \frac{60^2}{42^2} = 1 \Rightarrow x = 4\sqrt{149} \approx 48,826 \text{ m}.$$

Đường thẳng qua K , vuông góc với Oy là $\Delta_2: y = -90$. Δ_2 cắt hypebol tại điểm có hoành độ

$$\text{dương và thỏa mãn } \frac{x^2}{28^2} - \frac{90^2}{42^2} = 1 \Rightarrow x = 4\sqrt{274} \approx 66,212 \text{ m}.$$

Vậy bán kính nóc của tháp xấp xỉ 48,826 m, bán kính đáy của tháp xấp xỉ 66,212 m.

**ĐỀ SỐ 02**

Câu 1. (1,5 điểm) Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt{x^2 - x - 2} = \sqrt{-x^2 + 2x + 3}$;

b) $(x - 2)\sqrt{2x^2 + 4} = x^2 - 4$

Hướng dẫn giải:

a) Bình phương hai vế phương trình: $x^2 - x - 2 = -x^2 + 2x + 3 \Rightarrow 2x^2 - 3x - 5 = 0 \Rightarrow x = -1 \vee x = \frac{5}{2}$.

Thay các giá trị $x = -1$, $x = \frac{5}{2}$ vào phương trình đã cho, ta thấy chúng đều thỏa mãn.

Vậy tập nghiệm phương trình là: $S = \left\{-1; \frac{5}{2}\right\}$.

b) Ta có: $(x - 2)\sqrt{2x^2 + 4} = x^2 - 4$

$$\Leftrightarrow (x - 2)\sqrt{2x^2 + 4} = (x - 2)(x + 2) \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 = 0 \\ \sqrt{2x^2 + 4} = x + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ \sqrt{2x^2 + 4} = x + 2 \end{cases}.$$

Xét phương trình $\sqrt{2x^2 + 4} = x + 2$ (1).

Bình phương hai vế (1), ta được: $2x^2 + 4 = x^2 + 4x + 4 \Rightarrow x^2 - 4x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases}$.

Thay lần lượt $x = 0, x = 4$ vào phương trình (1), ta thấy chúng đều thỏa mãn.

Vậy tập nghiệm phương trình là: $S = \{0; 2; 4\}$.

Câu 2. (1,0 điểm) Giải bất phương trình $\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x} + 1 > 0$.

Hướng dẫn giải:

Điều kiện: $\begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$. Ta có: $\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x} + 1 > 0 \Leftrightarrow \frac{x - (x-1) + x(x-1)}{(x-1)x} > 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - x + 1}{x^2 - x} > 0$.

Dễ thấy $x^2 - x + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ vì $\begin{cases} a_1 = 1 > 0 \\ \Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 < 0 \end{cases}$.

Vì vậy bất phương trình trở thành $x^2 - x > 0$.

Tam thức bậc hai $x^2 - x$ có hai nghiệm $x_1 = 0, x_2 = 1$ và $a_2 = 1 > 0$ nên $x^2 - x > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ x > 1 \end{cases}$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $S = (-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$.

Câu 3. (1,0 điểm) Tìm tất cả tham số m để $f(x) = x^2 - 2mx + m^2 - m$ luôn dương với mọi x thuộc $\mathbb{R}$.

Hướng dẫn giải:

Ta có: $a = 1, b = -2m, c = m^2 - m$.

Theo giả thiết: $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 > 0 \text{ (luôn đúng)} \\ (-2m)^2 - 4(m^2 - m) < 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow 4m^2 - 4m^2 + 4m < 0 \Leftrightarrow m < 0$. Vậy với $m < 0$ thì $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Câu 4. (1,5 điểm) Có 3 cuốn sách lý, 4 cuốn sách sinh, 5 cuốn sách địa. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp các cuốn sách trên vào giá sách hàng ngang nếu:

a) Sắp xếp tùy ý?

b) Các cuốn sách cùng môn học đứng cạnh nhau?

Hướng dẫn giải:

a) Số cách xếp tùy ý 12 cuốn sách lên giá là $12!$ (cách).

b) Gọi L là nhóm 3 sách lý, S là nhóm 4 sách sinh, Đ là nhóm 5 sách địa.

Số cách xếp trong L là $3!$; số cách xếp trong S là $4!$; số cách xếp trong Đ là $5!$; số cách xếp L, S, Đ với nhau: $3!$.

Vậy số cách xếp thỏa mãn đề bài là: $3!4!5!3! = 103680$ (cách).

Câu 5. (1, 5 điểm) Cho $\left(1 - \frac{1}{2}x\right)^5 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5$.

a) Tìm hệ số lớn nhất trong tất cả hệ số $a_0, a_1, \dots, a_5$.

b) Tính tổng $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$.

Hướng dẫn giải:

$$\begin{aligned} \text{a) Ta có: } \left(1 - \frac{1}{2}x\right)^5 &= C_5^0 + C_5^1\left(-\frac{1}{2}x\right) + C_5^2\left(-\frac{1}{2}x\right)^2 + C_5^3\left(-\frac{1}{2}x\right)^3 + C_5^4\left(-\frac{1}{2}x\right)^4 + C_5^5\left(-\frac{1}{2}x\right)^5 \\ &= 1 - \frac{5}{2}x + \frac{5}{2}x^2 - \frac{5}{4}x^3 + \frac{5}{16}x^4 - \frac{1}{32}x^5 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 \quad (*). \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra: } a_0 = 1, a_1 = -\frac{5}{2}, a_2 = \frac{5}{2}, a_3 = -\frac{5}{4}, a_4 = \frac{5}{16}, a_5 = -\frac{1}{32}.$$

$$\text{Ta thấy hệ số lớn nhất tìm được là } a_2 = \frac{5}{2}.$$

$$\text{b) Thay } x=1 \text{ vào } (*), \text{ ta được: } \left(1 - \frac{1}{2}\right)^5 = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5.$$

$$\text{Vậy } a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = \frac{1}{32}.$$

Câu 6. (1,5 điểm) Cho họ đường tròn $(C_m): x^2 + y^2 + 4mx + 2(m+1)y - 1 = 0$.

a) Tìm m để (C_m) đi qua điểm $A(1;0)$.

b) Chứng minh rằng (C_m) luôn là đường tròn với mọi số thực m . Tìm bán kính bé nhất của đường tròn (C_m) .

Hướng dẫn giải:

a) (C_m) đi qua điểm $A(1;0)$ nên $1^2 + 0^2 + 4m \cdot 1 + 2(m+1) \cdot 0 - 1 = 0 \Rightarrow m = 0$.

Vậy $m = 0$ thỏa mãn đề bài.

$$\text{b) Đặt } a = \frac{4m}{-2} = -2m, b = \frac{2(m+1)}{-2} = -(m+1), c = -1.$$

Ta có: $a^2 + b^2 - c = 4m^2 + (m+1)^2 + 1 > 0, \forall m \in \mathbb{R}$ nên (C_m) luôn là đường tròn với mọi m .

$$\text{Bán kính đường tròn là: } R = \sqrt{a^2 + b^2 - c} = \sqrt{5m^2 + 2m + 2} = \sqrt{5\left(m + \frac{1}{5}\right)^2 + \frac{9}{5}} \geq \sqrt{\frac{9}{5}}.$$

$$\text{Vậy bán kính nhỏ nhất của đường tròn } R_{\min} = \sqrt{\frac{9}{5}}; \text{ khi đó } m = -\frac{1}{5}.$$

Câu 7. (1,0 điểm) Cho hai đường thẳng $d_1: \begin{cases} x = t \\ y = -2 + 2t \end{cases}, d_2: x + y + 3 = 0$. Viết phương trình tham số

đường thẳng d qua điểm $M(3;0)$, đồng thời cắt hai đường thẳng d_1, d_2 tại hai điểm A, B sao cho M là trung điểm của đoạn AB .

Hướng dẫn giải:

Xét đường thẳng $d_2: x + y + 3 = 0$; thay $x = t' \Rightarrow y = -3 - t'$, ta có phương trình tham số

$$d_2: \begin{cases} x = t' \\ y = -3 - t' \end{cases}$$

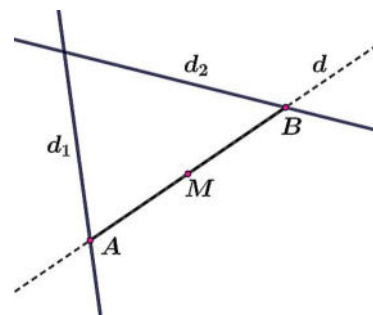
Gọi $A = d \cap d_1 \Rightarrow A(t; -2 + 2t)$; gọi $B = d \cap d_2 \Rightarrow B(t'; -3 - t')$.

$$\text{Vì } M(3; 0) \text{ là trung điểm của đoạn } AB \text{ nên } \begin{cases} 3 = \frac{t + t'}{2} \\ 0 = \frac{-2 + 2t - 3 - t'}{2} \end{cases}$$

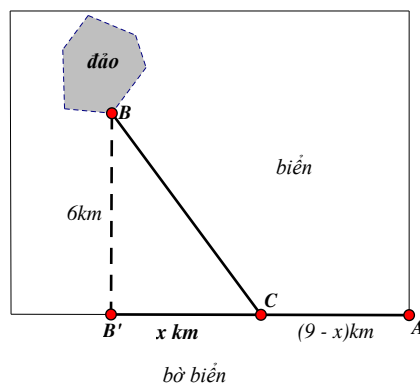
$$\Rightarrow \begin{cases} t + t' = 6 \\ 2t - t' = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = \frac{11}{3} \\ t' = \frac{7}{3} \end{cases}. \text{ Ta có } A\left(\frac{11}{3}; \frac{16}{3}\right) \Rightarrow \overrightarrow{AM} = \left(-\frac{2}{3}; -\frac{16}{3}\right) = -\frac{2}{3}\vec{u} \text{ với } \vec{u} = (1; 8) \text{ là một}$$

vector chỉ phương của d .

$$\text{Phương trình tham số của } d \text{ là } \begin{cases} x = 3 + t \\ y = 8t \end{cases}.$$



Câu 8. (1,0 điểm) Một công ty muốn làm một đường ống dẫn từ một điểm A trên bờ đến một điểm B trên một hòn đảo theo lộ trình từ A đến C (đường bờ biển) rồi từ C đến B (dưới nước) như hình vẽ. Hòn đảo cách bờ biển 6 km. Giá để xây đường ống trên bờ là 50000 USD mỗi km, giá để xây đường ống dưới nước là 130000 USD mỗi km; B' là điểm trên bờ biển sao cho BB' vuông góc với bờ biển. Khoảng cách từ A đến B' là 9 km. Biết rằng chi phí làm đường ống này là 1170000 USD. Hỏi vị trí C cách vị trí A bao nhiêu km?



Hướng dẫn giải:

Gọi $x = B'C$ ($0 \leq x \leq 9$), khi đó: $BC = \sqrt{x^2 + 36}$.

Số tiền xây đường ống trên bờ: $(9-x) \times 50000$; số tiền xây đường ống dưới biển: $130000 \times \sqrt{x^2 + 36}$.

Tổng chi phí bỏ ra để làm đường ống là: $(9-x) \times 50000 + 130000 \times \sqrt{x^2 + 36}$.

Theo giả thiết: $(9-x) \cdot 50000 + 130000 \sqrt{x^2 + 36} = 1170000$

$$\Leftrightarrow 5(9-x) + 13\sqrt{x^2 + 36} = 117 \Leftrightarrow 13\sqrt{x^2 + 36} = 5x + 72$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x + 72 \geq 0 \\ 169(x^2 + 36) = 25x^2 + 720x + 5184 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{72}{5} \\ 144x^2 - 720x + 900 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}.$$

Ta có $B'C = 2,5 \text{ km} \Rightarrow AC = 9 - 2,5 = 6,5 \text{ km}$. Vậy, vị trí C cách vị trí A một khoảng bằng 6,5 km.

ĐỀ SỐ 03

Câu 1. (1,5 điểm) Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt{2x^2+5} = \sqrt{x^2-x+11}$;

b) $\sqrt{5x+10} = 8-x$.

Hướng dẫn giải:

a) Bình phương hai vế phương trình, ta được:

$$2x^2+5 = x^2-x+11 \Rightarrow x^2+x-6=0 \Rightarrow x=2 \vee x=-3.$$

Thay các giá trị $x=2$, $x=-3$ vào phương trình, ta thấy chúng đều thỏa mãn.

Vậy, tập nghiệm phương trình là $S = \{2; -3\}$.

b) Bình phương hai vế phương trình, ta được:

$$5x+10 = 64-16x+x^2 \Leftrightarrow x^2-21x+54=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=18 \end{cases}.$$

Thay cả hai giá trị $x=3$, $x=18$ vào phương trình đã cho, ta thấy chỉ có $x=3$ thỏa mãn.

Vậy tập nghiệm phương trình: $S = \{3\}$.

Câu 2. (1,0 điểm) Tìm tất cả tham số m để $f(x) = mx^2 - 2x + m$ luôn âm với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Hướng dẫn giải:

Ta có: $a=m$, $b=-2$, $c=m$. Theo giả thiết: $mx^2 - 2x + m < 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ (*).

Trường hợp 1: $a=m=0$. Thay vào (*): $-2x < 0$, $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ (sai). Suy ra $m=0$ không thỏa.

Trường hợp 2: $a=m \neq 0$.

$$\text{Khi đó: } (*) \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ (-2)^2 - 4m.m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m^2 > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ |m| > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m < -1 \vee m > 1 \end{cases} \Leftrightarrow m < -1.$$

Vậy với $m < -1$ thì $f(x)$ luôn âm với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Câu 3. (1,5 điểm)

c) Cho tập hợp $A = \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$. Có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên chẵn có bốn chữ số khác nhau?

d) Cho hai đường thẳng d_1 và d_2 song song với nhau. Trên d_1 có 10 điểm phân biệt, trên d_2 có n điểm phân biệt ($n \geq 2$). Biết rằng có 2800 tam giác mà đỉnh của chúng là các điểm nói trên. Tìm n .

Hướng dẫn giải:

a) Gọi số tự nhiên có bốn chữ số là $\overline{abcd}$ với a, b, c, d lấy từ tập A .

Trường hợp 1: $d=0$.

Chọn d : có 1 cách. Chọn a ($a \neq 0$): có 5 cách.

Số cách chọn b, c lần lượt là 4, 3.

Số các số tự nhiên trong trường hợp này là $1 \times 5 \times 4 \times 3 = 60$.

Trường hợp 2: $d \in \{2; 4\}$.

Chọn d : có 2 cách. Chọn a ($a \neq 0, a \neq d$): có 4 cách.

Số cách chọn b, c lần lượt là 4, 3.

Số các số tự nhiên trong trường hợp này là $2 \times 4 \times 4 \times 3 = 96$.

Vậy số các số tự nhiên thỏa mãn đề bài là $60 + 96 = 156$.

b)

Nhận xét: Một tam giác được tạo thành cần 2 điểm thuộc d_1 ; 1 điểm thuộc d_2 và ngược lại. Vì vậy số tam giác có được là: $C_{10}^2 C_n^1 + C_{10}^1 C_n^2$.

Ta có: $C_{10}^2 C_n^1 + C_{10}^1 C_n^2 = 2800 \Leftrightarrow 45n + 5n(n-1) - 2800 = 0 \Leftrightarrow n = 20$.

Câu 4. (1,0 điểm) Xét biểu thức $(x+2y)^3 + (2x-y)^3$. Viết khai triển biểu thức trên bằng nhị thức Newton và tìm tổng các hệ số của số hạng mà lũy thừa của x lớn hơn lũy thừa của y .

Hướng dẫn giải:

$$\begin{aligned} \text{a) Ta có: } (x+2y)^3 + (2x-y)^3 &= C_3^0 x^3 + C_3^1 x^2 (2y) + C_3^2 x (2y)^2 + C_3^3 (2y)^3 \\ &\quad + C_3^0 (2x)^3 + C_3^1 (2x)^2 (-y) + C_3^2 (2x)(-y)^2 + C_3^3 (-y)^3 \\ &= x^3 + 6x^2y + 12xy^2 + 8y^3 + 8x^3 - 12x^2y + 6xy^2 - y^3 = 9x^3 - 6x^2y + 18xy^2 + 7y^3. \end{aligned}$$

b) Có hai số hạng mà lũy thừa của x lớn hơn lũy thừa của y là $9x^3, -6x^2y$.

Tổng hệ số của chúng: $9 + (-6) = 3$.

Câu 5. (1,0 điểm) Giơ đồng thời hai con súc sắc cân đối đồng chất. Tính xác suất để:

a) Tổng số chấm thu được từ hai con súc sắc bằng 6.

b) Tích số chấm trên hai con súc sắc là một số chính phương.

Hướng dẫn giải:

Số phần tử không gian mẫu là $n(\Omega) = 6 \times 6 = 36$.

a) Gọi biến cố A : “Tổng số chấm thu được từ hai con súc sắc bằng 6”.

Ta có: $A = \{(1; 5), (2; 4), (3; 3), (5; 1), (4; 2)\} \Rightarrow n(A) = 5$.

$$\text{Do vậy } P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{5}{36}.$$

b) Gọi biến cố C : “Tích số chấm trên hai con súc sắc là một số chính phương”

Ta có: $C = \{(1; 1), (2; 2), (3; 3), (4; 4), (5; 5), (6; 6), (1; 4), (4; 1)\} \Rightarrow n(C) = 8$.

$$\text{Vậy } P(C) = \frac{n(C)}{n(\Omega)} = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}.$$

Câu 6. (1,5 điểm)

a) Tìm góc giữa hai đường thẳng d_1, d_2 biết rằng: $d_1: 2x - y - 10 = 0$ và $d_2: x - 3y + 9 = 0$.

b) Viết phương trình đường thẳng d song song với $\Delta: x + 4y - 2 = 0$ và cách điểm $A(-2; 3)$ một khoảng bằng 3.

Hướng dẫn giải:

a) Hai đường d_1, d_2 có cặp vector pháp tuyến $\vec{n}_1 = (2; -1), \vec{n}_2 = (1; -3)$.

$$\cos(d_1, d_2) = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{|2 \cdot 1 + 3 \cdot 1|}{\sqrt{4+1} \cdot \sqrt{1+9}} = \frac{5}{5\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow (d_1, d_2) = 45^\circ.$$

b) Ta có: $d // \Delta: x + 4y - 2 = 0 \Rightarrow$ Phương trình d có dạng: $x + 4y + c = 0$ ($c \neq -2$).

$$\text{Mặt khác: } d(A, d) = 3 \Rightarrow \frac{|-2 + 4 \cdot 3 + c|}{\sqrt{1+16}} = 3 \Rightarrow |10 + c| = 3\sqrt{17}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c = 3\sqrt{17} - 10 \\ c = -3\sqrt{17} - 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d_1: x + 4y + 3\sqrt{17} - 10 = 0 \\ d_2: x + 4y - 3\sqrt{17} - 10 = 0 \end{cases}.$$

Vậy có hai đường thẳng thỏa mãn: $x + 4y + 3\sqrt{17} - 10 = 0$; $x + 4y - 3\sqrt{17} - 10 = 0$.

Câu 7. (1,5 điểm) Cho elip có phương trình chính tắc $(E): \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$.

a) Tìm tọa độ các tiêu điểm F_1, F_2 và tiêu cự, tâm sai của elip.

b) Tìm tọa độ điểm M thuộc (E) sao cho $MF_1 - MF_2 = 2$.

Hướng dẫn giải:

a) Ta có $a^2 = 8 \Rightarrow a = 2\sqrt{2}$; $b^2 = 4 \Rightarrow b = 2$; $c^2 = a^2 - b^2 = 4 \Rightarrow c = 2$.

Do đó elip có các tiêu điểm $F_1(-2; 0)$, $F_2(2; 0)$, tiêu cự $F_1F_2 = 2c = 4$, tâm sai $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

b) Gọi $M(x; y) \in (E) \Rightarrow MF_1 = a + \frac{c}{a}x = 2\sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}x$, $MF_2 = 2\sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}x$;

$$MF_1 - MF_2 = 2 \Leftrightarrow 2\sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}x - \left(2\sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}x\right) = 2 \Leftrightarrow x = \sqrt{2}.$$

Thay vào $(E): \frac{2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1 \Leftrightarrow y^2 = 3 \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{3}$.

Vậy $M(\sqrt{2}; -\sqrt{3})$ hoặc $M(\sqrt{2}; \sqrt{3})$ thỏa mãn đề bài.

Câu 8. (1,0 điểm) Người ta làm ra một cái thang bắc lên tầng hai của một ngôi nhà (hình vẽ), muốn vậy họ cần làm một thanh đỡ BC có chiều dài bằng 4 m, đồng thời muốn đảm bảo kỹ thuật thì tỉ số độ

dài $\frac{CE}{BD} = \frac{5}{3}$. Hỏi vị trí A cách vị trí B bao nhiêu mét?

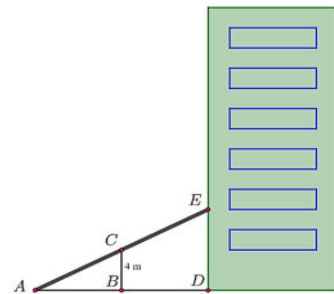
Hướng dẫn giải:

Đặt $AB = x > 0$. Xét tam giác ABC vuông tại B có: $AC = \sqrt{x^2 + 16}$.

Theo tính chất định lí Ta-lét, ta có: $\frac{AC}{AB} = \frac{CE}{BD} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x^2+16}}{x} = \frac{5}{3}$

$$\Leftrightarrow 3\sqrt{x^2+16} = 5x \Leftrightarrow \begin{cases} 5x \geq 0 \\ 9(x^2+16) = 25x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 16x^2 = 144 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3.$$

Vậy hai vị trí A, B cách nhau 3 m.



ĐỀ SỐ 04

Câu 1. (1,5 điểm) Giải phương trình:

a) $\sqrt{x+2} = \sqrt{3x^2-x+1}$;

b) $\sqrt{7x+11} + x + 1 = 0$.

Hướng dẫn giải:

a) Bình phương hai vế phương trình, ta có: $3x^2 - x + 1 = x + 2 \Leftrightarrow 3x^2 - 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = -\frac{1}{3}$.

Thay các giá trị $x = 1, x = -\frac{1}{3}$ vào phương trình đã cho, ta thấy chúng đều thỏa mãn.

Vậy tập nghiệm phương trình là: $S = \left\{1; -\frac{1}{3}\right\}$.

b) Ta có: $\sqrt{7x+11} + x + 1 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{7x+11} = -x - 1$.

Bình phương hai vế phương trình, ta được $7x+11 = x^2 + 2x + 1 \Rightarrow x^2 - 5x - 10 = 0 \Rightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{65}}{2}$.

Thay hai giá trị $x = \frac{5 \pm \sqrt{65}}{2}$ vào phương trình ban đầu, ta thấy chỉ có $x = \frac{5 - \sqrt{65}}{2}$ thỏa mãn.

Vậy tập nghiệm phương trình là: $S = \left\{\frac{5 - \sqrt{65}}{2}\right\}$.

Câu 2. (1,0 điểm) Chứng minh phương trình sau luôn vô nghiệm dù m lấy bất kì giá trị nào:

$$x^2 - 2(m+1)x + 2m^2 + m + 3 = 0.$$

Hướng dẫn giải:

Ta có: $a = 1, b = -2(m+1), c = 2m^2 + m + 3$.

$$\Delta' = (m+1)^2 - (2m^2 + m + 3) = -m^2 + m - 2.$$

Đặt $f(m) = -m^2 + m - 2$ với $\Delta_f = 1 - 4(-1)(-2) = -7 < 0$.

Bảng xét dấu $f(m)$:

Trường hợp 3: $b < 4$. Ta thấy có ba kết quả thỏa mãn là $(3;1), (3;2), (2;1)$.

Vậy $n(A) = 12 + 4 + 3 = 19$.

Xác suất để phương trình có nghiệm là $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{19}{36}$.

Câu 6. (1,0 điểm) Viết phương trình tham số của đường thẳng Δ biết Δ là đường trung trực của đoạn thẳng AB với $A(3;1), B(-3;5)$.

Hướng dẫn giải:

Đường thẳng Δ qua trung điểm $I(0;3)$ của đoạn AB , đồng thời nhận $\overrightarrow{AB} = (-6;4)$ làm vector pháp tuyến, vì vậy Δ nhận $\vec{u} = (2;3)$ làm vector chỉ phương.

Vậy phương trình tham số của Δ là: $\begin{cases} x = 2t \\ y = 3 + 3t \end{cases}$.

Câu 7. (1,0 điểm) Cho điểm M nằm trên hyperbol $(H): \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$. Nếu hoành độ điểm M bằng 8 thì khoảng cách từ M đến các tiêu điểm của (H) là bao nhiêu?

Hướng dẫn giải:

Ta có: $a^2 = 16, b^2 = 9, c^2 = a^2 + b^2 = 25 \Rightarrow c = 5$.

Tiêu điểm của (H) là $F_1(-5;0)$ và $F_2(5;0)$.

Thay $x = 8$ vào phương trình $(H): \frac{8^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1 \Rightarrow y = \pm 3\sqrt{3}$.

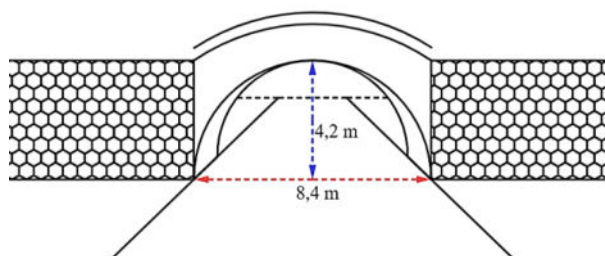
Có hai điểm thỏa mãn là $M_1(8;3\sqrt{3})$ và $M_2(8;-3\sqrt{3})$.

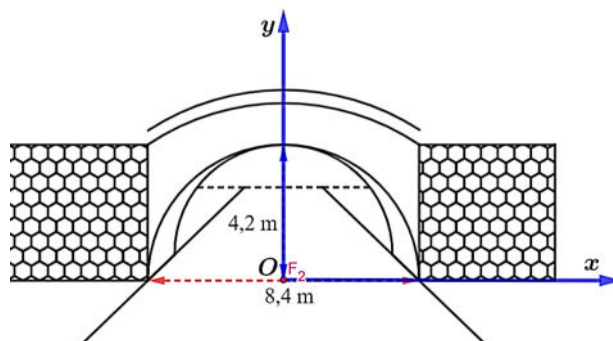
Ta có: $M_1F_1 = M_2F_1 = 14, M_1F_2 = M_2F_2 = 6$.

Câu 8. (1,5 điểm) Một cái cổng hình bán nguyệt rộng 8,4 m, cao 4,2 m như hình vẽ. Mặt đường dưới cổng được chia làm hai làn cho xe ra vào.

a) Viết phương trình mô phỏng cái cổng.

b) Một chiếc xe tải rộng 2,2m, cao 2,6 m đi đúng làn đường quy định có thể đi qua cổng mà không làm hư hỏng cổng hay không?



Hướng dẫn giải:

a) Đặt hệ trục Oxy như hình vẽ với gốc O là tâm của bán nguyệt.

Khi đó cái cổng được cho bởi nửa đường tròn tâm O , bán kính $R = 4,2 \text{ m}$; phương trình nửa

đường tròn là:
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4,2^2 \\ y \geq 0 \end{cases}.$$

b) Xe tải phải đi ở làn đường bên phải (ứng với một phần tư đường tròn). Xe tải muốn đi qua không vướng gì thì đường chéo mặt cắt ngang của xe tải (giả sử là hình chữ nhật) nhỏ hơn bán kính cổng bán nguyệt.

Đường chéo cần tìm là: $\sqrt{2,2^2 + 2,6^2} \approx 3,4 \text{ m} < R$.

Vậy chiếc xe tải như trên có thể qua cổng mà không gây hư hỏng gì.

