TRƯỜNG THPT CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN - TỈNH NINH THUẬN

GV: VŨ NGỌC HUY

TOÁN 10

CHUYÊN ĐỀ

1. Tóm tắt lý thuyết
2. Bài tập
3. Bài tập vận dụng
4. Bài tập liên hệ thực tế

TÀI LIỆU CHUYÊN ĐỀ HỌC TẬP 3 BỘ SÁCH

MỤC LỤC

Chương 1 Hệ phương trình bậc nhất ba ẩn và ứng dụng

Bài 1. Hệ phương trình bậc nhất ba ẩn

A Tóm tắt lý thuyết

1 Định nghĩa hệ phương trình bậc nhất ba ẩn

Định nghĩa.

- Phương trình bậc nhất ba ẩn là hệ thức có dạng

$$ax + by + cz = d,$$

  trong đó x, y, z gọi là ba ẩn và a, b, c, d là các số thực cho trước gọi là các hệ số, thoả mãn a, b, c không đồng thời bằng 0.
  Mỗi bộ ba số $(x_0; y_0; z_0)$ thoả mãn phương trình trên gọi là một nghiệm của phương trình bậc nhất ba ẩn.

- Hệ ba phương trình bậc nhất ba ẩn là hệ có dạng

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$

  trong đó x, y, z là ba ẩn a_i, b_i, c_i, d_i là các số thực cho trước gọi là các hệ số. Ở đây các hệ số a_i, b_i, c_i $(i = 1, 2, 3)$ không đồng thời bằng 0.
  Mỗi bộ ba số $(x_0; y_0; z_0)$ thoả mãn đồng thời cả ba phương trình của hệ gọi là một nghiệm của hệ phương trình.
  Giải hệ ba phương trình bậc nhất ba ẩn là tìm tất cả các nghiệm của nó.

> ! Hệ ba phương trình bậc nhất ba ẩn còn được gọi tắt là hệ phương trình bậc nhất ba ẩn.

Ví dụ 1: Hệ phương trình nào dưới đây là hệ phương trình bậc nhất ba ẩn? Mỗi bộ ba số $(1; 2; 2)$, $(-1; 2; 3)$ có là nghiệm của hệ phương trình bậc nhất ba ẩn đó không?

(1) $\begin{cases} 2x - 3y + 4z = 4 \\ -x + 2y + z = 8 \\ 3x + 4y - z = 2; \end{cases}$ (2) $\begin{cases} 3x - 2y^2 + 4z = 6 \\ 4x - 5y + 2z = -3 \\ x + 3y - z = -1. \end{cases}$

....
....
....
....

....
....
....
....
....
....

Rèn luyện 1: Hệ phương trình nào dưới đây là hệ phương trình bậc nhất ba ẩn? Mỗi bộ ba số $(1;5;2)$, $(1;1;1)$ và $(-1;2;3)$ có là nghiệm của hệ phương trình bậc nhất ba ẩn đó không?

(1) $\begin{cases} 4x-2y+z=5 \\ 4xz-5y+2z=-7 \\ -x+3y+2z=3; \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x+2z=5 \\ 2x-y+z=-1 \\ 3x-2y=-7. \end{cases}$

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

2 Giải hệ phương trình bậc nhất ba ẩn bằng phương pháp Gauss

Định nghĩa.
Để giải hệ phương trình bậc nhất ba ẩn, ta có thể sử dụng các phép biến đổi tương đương để đưa nó về hệ phương trình bậc nhất ba ẩn dạng tam giác, từ đó tìm nghiệm của hệ.
Cách giải như thế gọi là ***giải hệ phương trình bậc nhất ba ẩn bằng phương pháp Gauss***.

Ví dụ 2: Giải hệ phương trình sau bằng phương pháp Gauss:

$$\begin{cases} 3x-y+z=3 & (1) \\ x-y+z=2 & (2) \\ y+2z=1. & (3) \end{cases}$$

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 3: Giải hệ phương trình sau bằng phương pháp Gauss:

$$\begin{cases} x-2y+3z=9 & (1) \\ 2x+3y-z=4 & (2) \\ x+5y-4z=2. & (3) \end{cases}$$

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 4: Giải hệ phương trình sau bằng phương pháp Gauss:

$$\begin{cases} 2x + 2y - z = -1 & (1) \\ x + 4y + z = -8 & (2) \\ x - 2y - 2z = 7. & (3) \end{cases}$$

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Nhận xét. Một hệ phương trình bậc nhất ba ẩn có thể có nghiệm duy nhất, vô nghiệm hoặc vô số nghiệm.

Rèn luyện 2: Giải các hệ phương trình sau bằng phương pháp Gauss:

a) $\begin{cases} x - 2y = 1 \\ x + 2y - z = -2 \\ x - 3y + z = 3; \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 3x - y + 2z = 2 \\ x + 2y - z = 1 \\ 2x - 3y + 3z = 2; \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ x - 4y + 2z = -1 \\ 4x - y + 3z = 1. \end{cases}$

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Rèn luyện 3: Tìm phương trình của parabol $(P)\colon y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$, biết (P) đi qua ba điểm $A(0; -1)$, $B(1; -2)$ và $C(2; -1)$.

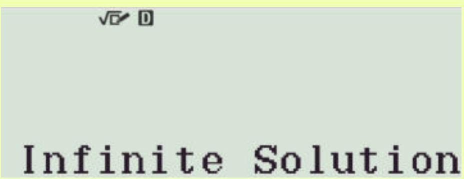
....

3 Sử dụng máy tính cầm tay tìm nghiệm của hệ phương trình bậc nhất ba ẩn

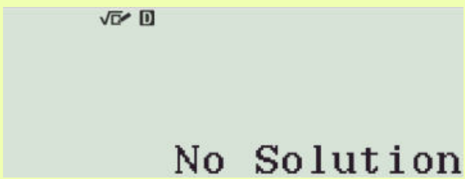
Ngày nay, cùng với sự phát triển của khoa học kĩ thuật, người ta đã sản xuất ra những chiếc máy tính cầm tay nhỏ gọn, dễ dàng sử dụng để hỗ trợ việc tính toán. Có nhiều loại máy tính cầm tay có thể giúp tìm nghiệm của hệ phương trình bậc nhất ba ẩn một cách dễ dàng. Chẳng hạn, ta có thể thực hiện trên một loại máy tính cầm tay như sau:

Ví dụ 5: Xét hệ phương trình $\begin{cases} x - 3y + 2z = 5 \\ x + 2y - 3z = 4 \\ 3x - y - z = 2. \end{cases}$

Đối với các hệ phương trình bậc nhất ba ẩn vô nghiệm hoặc vô số nghiệm, sau khi thực hiện tương tự như Ví dụ 5, ta nhận được kết quả hiển thị trên màn hình máy tính cầm tay như sau:



Hệ phương trình vô số nghiệm



Hệ phương trình vô nghiệm

Rèn luyện 4: Sử dụng máy tính cầm tay, tìm nghiệm của các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases} 2x + y - z = -1 \\ x + 3y + 2z = 2 \\ 3x + 3y - 3z = -5; \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x - 3y + 2z = 5 \\ x + 2y - 3z = 4 \\ 3x - y - z = 2; \end{cases}$

c) $\begin{cases} x-y-z=-1 \\ 2x-y+z=-1 \\ -4x+3y+z=3. \end{cases}$

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Rèn luyện 5: Ba bạn Nhân, Nghĩa và Phúc đi vào căng tin của trường. Nhân mua một li trà sữa, một li nước trái cây, hai cái bánh ngọt và trả 90 000 đồng. Nghĩa mua một li trà sữa, ba cái bánh ngọt và trả 50 000 đồng. Phúc mua một li trà sữa, hai li nước trái cây, ba cái bánh ngọt và trả 140 000 đồng. Gọi x, y, z lần lượt là giá tiền của một li trà sữa, một li nước trái cây và một cái bánh ngọt tại căng tin đó.

a) Lập các hệ thức thể hiện mối liên hệ giữa x, y và z.

b) Tìm giá tiền của một li trà sữa, một li nước trái cây và một cái bánh ngọt tại căng tin đó.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

B Bài tập

Bài 1: Trong các hệ phương trình sau, hệ nào là hệ phương trình bậc nhất ba ẩn? Mỗi bộ ba số $(-1;2;1)$, $(-1,5;0,25;-1,25)$ có là nghiệm của hệ phương trình bậc nhất ba ẩn đó không?

a) $\begin{cases} 3x-2y+z=-6 \\ -2x+y+3z=7 \\ 4x-y+7z=1; \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 5x-2y+3z=4 \\ 3x+2yz-z=2 \\ x-3y+2z=-1. \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} 2x-4y-3z=\dfrac{-1}{4} \\ 3x+8y-4z=\dfrac{5}{2} \\ 2x+3y-2z=\dfrac{1}{4}. \end{cases}$

....
....
....
....

Bài 2: Giải các hệ phương trình sau bằng phương pháp Gauss:

a) $\begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ x - 3y = 2 \\ 2x + y - z = 3; \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x + 3y + 2z = 8 \\ 3x - y + z = 4; \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} x - y + 5z = -2 \\ 2x + y + 4z = 2 \\ x + 2y - z = 4. \end{cases}$

Bài 3: Sử dụng máy tính cầm tay, tìm nghiệm của các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases} x - 5z = 2 \\ 3x + y - 4z = 3 \\ -x + 2y + z = -1; \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ x + 2y - z = 1 \\ 3x + y - 2z = 2; \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 2x + y - 2z = 2 \\ 4x - 7y - 4z = 4. \end{cases}$

Bài 4: Tìm phương trình của parabol (P): $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$, biết:

a) Parabol (P) có trục đối xứng $x = 1$ và đi qua hai điểm $A(1; -4)$, $B(2; -3)$;

b) Parabol (P) có đỉnh $I\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right)$ và đi qua điểm $M(-1; 3)$.

....
....
....

Bài 5: Một đại lí bán ba loại gas A, B, C với giá bán mỗi bình gas lần lượt là 520 000 đồng, 480 000 đồng, 420 000 đồng. Sau một tháng, đại lí đã bán được 1299 bình gas các loại với tổng doanh thu đạt 633 960 000 đồng. Biết rằng trong tháng đó, đại lí bán được số bình gas loại B bằng một nửa tổng số bình gas loại A và C. Tính số bình gas mỗi loại mà đại lí bán được trong tháng đó.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Bài 2. HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT BA ẨN

A BÀI TẬP

Bài 1: Hệ nào dưới đây là hệ phương trình bậc nhất ba ẩn? Kiểm tra xem bộ số $(2;0;-1)$ có phải là nghiệm của hệ phương trình bậc nhất bậc nhất ba ẩn đó không?

a) $\begin{cases} x-2z &= 4 \\ 2x+y-z &= 5 \\ -3x+2y &= -6; \end{cases}$

b) $\begin{cases} x-2y+3z &= 7 \\ 2x-y^2+z &= 2 \\ x+2y &= -1. \end{cases}$

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Bài 2: Giải các hệ phương trình sau

a) $\begin{cases} 2x-y-z &= 20 \\ x+y &= -5 \\ x &= 10; \end{cases}$

b) $\begin{cases} x-y-3z &= 20 \\ x-z &= 3 \\ x+3z &= -7. \end{cases}$

....
....
....

....
....
....
....
....
....
....

Bài 3: Giải các hệ phương trình sau bằng phương pháp Gauss

a) $\begin{cases} 2x-y-z &= 2 \\ x+y &= 3 \\ x-y+z &= 2; \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2x-y-z &= 2 \\ x+2y+z &= 5 \\ -x+y &= 2; \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} x-3y-z &= -6 \\ 2x-y+2z &= 6 \\ 4x-7y &= -6; \end{cases}$

d) $\begin{cases} x-3y-z &= -6 \\ 2x-y+2z &= 6 \\ 4x-7y &= 3; \end{cases}$ **e)** $\begin{cases} 3x-y-7z &= 2 \\ 4x-y+z &= 11 \\ -5x-y-9z &= -22; \end{cases}$ **f)** $\begin{cases} 2x-3y-4z &= -2 \\ 5x-y-2z &= 3 \\ 7x-4y-6z &= 1. \end{cases}$

Kiểm tra lại kết quả tìm được bằng cách sử dụng máy tính cầm tay.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Bài 4: Ba người cùng là việc cho một công ty với vị trí lần lượt là quản lí kho, quản lí văn phòng và tài xế xe tải. Tổng tiền lương hằng năm của người quản lí kho và người quản lí văn phòng là 164 triệu đồng, còn của người quản lí kho và tài xế xe tải là 156 triệu đồng. Mỗi năm, người quản lí kho lĩnh lương nhiều hơn tài xế xe tải 8 triệu đồng. Hỏi lương hằng năm của mỗi người là bao nhiêu?

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Bài 5: Năm ngoái, người ta có thể mua ba mẫu xe ô tô của ba hãng X, Y, Z với tổng số tiền là 2,8 tỉ đồng. Năm nay, do lạm phát, để mua ba chiếc xe đó cần 3,018 tỉ đồng. Giá xe ô tô của hãng X tăng 8%, của hãng Y tăng 5% và của hãng Z tăng 12%. Nếu trong năm ngoái giá chiếc xe của hãng Y thấp hơn 200 triệu đồng so với giá chiếc xe của hãng X thì giá của mỗi chiếc xe trong năm ngoái là bao nhiêu?

....
....

....
....
....
....
....
....
....
....

Bài 6: Cho hệ phương trình bậc nhất ba ẩn sau

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3. \end{cases}$$

a) Giả sử $(x_0; y_0; z_0)$ và $(x_1; y_1; z_1)$ là hai nghiệm phân biệt của hệ phương trình trên. Chứng minh rằng $\left(\dfrac{x_0 + x_1}{2}; \dfrac{y_0 + y_1}{2}; \dfrac{z_0 + z_1}{2}\right)$ cũng là một nghiệm của hệ.

b) Sử dụng kết quả của câu a) chứng minh rằng, nếu hệ phương trình bậc nhất ba ẩn có hai nghiệm phân biệt thì nó sẽ có vô số nghiệm.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Bài 1: Kiểm tra xem mỗi bộ số $(x; y; z)$ đã cho có là nghiệm của hệ phương trình tương ứng hay không?

a) $\begin{cases} x + 3y + 2z &= 1 \\ 5x - y + 3z &= 16 \\ -3x + 7y + z &= 14. \end{cases}$ $(0; 3; -2), (12; 5; -13), (1; -2; 3)$;

b) $\begin{cases} 3x - y + 4z &= -10 \\ -x + y + 2z &= 6 \\ 2x - y + z &= -8. \end{cases}$ $(-2; 4; 0), (0; -3; 10), (1; -1; 5)$;

c) $\begin{cases} x + y + z &= 100 \\ 5x + 3y + \dfrac{1}{3}z &= 100. \end{cases}$
$(4; 18; 78), (8; 11; 81), (12; 4; 84)$.

....
....
....
....
....

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

Bài 2: Giải các hệ phương trình

a) $\begin{cases} x-2y+4z &= 4 \\ 3y-z &= 2 \\ 2x &= -10; \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 4x+3y-5z &= -7 \\ 2y &= 4 \\ y+z &= 3; \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} x+y+2z &= 0 \\ 3x+2y &= 2 \\ x &= 10. \end{cases}$

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

Bài 3: Giải các hệ phương trình

a) $\begin{cases} 3x-y-2z &= 5 \\ 2x+y+3z &= 6 \\ 6x-y-4z &= 9; \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x+2y+6z &= 5 \\ -x+y-2z &= 3 \\ x-4y-2z &= 1; \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} x+4y-2z &= 2 \\ -3x+y+z &= -2 \\ 5x+7y-5z &= 6. \end{cases}$

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

Bài 4: Tìm số đo ba góc của một tam giác, biết tổng số đo của góc thứ nhất và góc thứ hai bằng hai lần số đo của góc thứ ba, số đo của góc thứ nhất lớn hơn số đo của góc thứ ba là 20°.

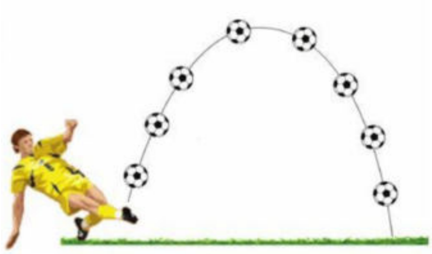
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

Bài 5: Bác Thanh chia số tiền 1 tỉ đồng của mình cho ba khoản đầu tư. Sau một năm, tổng số tiền lãi thu được là 84 triệu đồng. Lãi suất cho ba khoản đầu tư lần lượt là 6%, 8%, 15% và số tiền đầu tư cho khoản thứ nhất bằng tổng số tiền đầu tư cho khoản thứ hai và thứ ba. Tính số tiền bác Thanh đầu tư cho mỗi khoản.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Bài 6:

Khi một quả bóng được đá lên, nó sẽ đạt độ cao nào đó rồi rơi xuống. Biết quỹ đạo chuyển động của quả bóng là một parabol và độ cao h của quả bóng được tính theo công thức $h = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + h_0$, trong đó độ cao h và độ cao ban đầu h_0 được tính bằng mét, t là thời gian của chuyển động tính bằng giây, a là gia tốc của chuyển động tính bằng m/s^2, v_0 là vận tốc ban đầu được tính bằng m/s. Tìm a, v_0, h_0 biết sau 0,5 giây quả bóng đạt được độ cao 6,075 m; sau 1 giây quả bóng đạt được độ cao 8,5 m; sau 2 giây quả bóng đạt được độ cao 6 m.



....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Bài 7: Một cửa hàng bán đồ nam gồm áo sơ mi, quần âu và áo phông. Ngày thứ nhất bán được 22 áo sơ mi, 12 quần âu và 18 áo phông, doanh thu là 12 580 000 đồng. Ngày thứ hai bán được 16 áo sơ mi, 10 quần âu và 20 áo phông, doanh thu là 10 800 000 đồng. Ngày thứ ba bán được 24 áo sơ mi, 15 quần âu và 12 áo phông, doanh thu là 12 960 000 đồng. Hỏi giá bán mỗi áo sơ mi, mỗi quần âu và mỗi áo phông là bao nhiêu? Biết giá từng loại trong ba ngày không thay đổi.

....
....
....
....
....
....
....
....

....
....

Bài 8: Ba nhãn hiệu bánh quy là A, B, C được cung cấp bởi một nhà phân phối. Với tỉ lệ thành phần dinh dưỡng theo khối lượng, bánh quy nhãn hiệu A chứa 20% protein, bánh quy nhãn hiệu B chứa 28% protein và bánh quy nhãn hiệu C chứa 30% protein. Một khách hàng muốn mua một đơn hàng như sau

- Mua tổng cộng 224 cái bánh quy bao gồm cả ba nhãn hiệu A, B, C.
- Lượng protein trung bình của đơn hàng này (gồm cả ba nhãn hiệu A, B, C) là 25%.
- Lượng bánh nhãn hiệu A gấp đôi lượng bánh nhãn hiệu C.

Tính lượng bánh quy mỗi loại mà khách hàng đó đặt mua biết rằng các bánh quy có khối lượng như nhau.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Bài 9: Sử dụng máy tính cầm tay để tìm nghiệm của các hệ phương trình sau

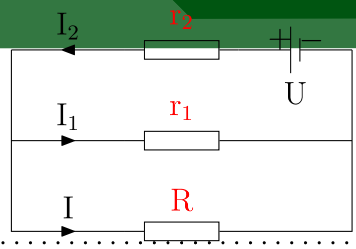
a) $\begin{cases} -x+2y-3z = 2 \\ 2x+y+2z = -3 \\ -2x-3y+z = 5; \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x-3y+z = 1 \\ 5y-4z = 0 \\ x+2y-3z = -1; \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} x+y-3z = -1 \\ 3x-5y-z = -3 \\ -x+4y-2z = 1. \end{cases}$

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Bài 3. Bài tập chuyên đề - Ứng dụng hệ phương trình bậc nhất ba ẩn (sách cánh diều)

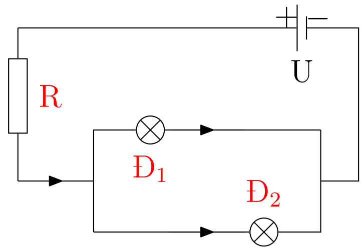
Câu 1:

Cho mạch điện như hình vẽ. Biết U = 20 V; R = 0,5 Ω; r_1 = 1 Ω; r_2 = 2 Ω. Tìm cường độ dòng điện I_1; I_2; I chạy qua mỗi điện trở.



Câu 2:

Cho mạch điện như Hình vẽ. Biết U = 24 V; Đ$_1$: 12 V − 6 W; Đ$_2$: 12 V − 12 W; R = 3 Ω.



a) Tính điện trở của mỗi bóng đèn.

b) Tính cường độ dòng điện chạy qua mỗi bóng đèn và điện trở R.

Câu 3: Tìm các hệ số x, y, z để cân bằng mỗi phương trình phản ứng hoá học sau

a) $x\mathrm{KClO_3} \xrightarrow{t_0} y\mathrm{KCl} + z\mathrm{O_2}$.

b) $x\mathrm{FeCl_2} + y\mathrm{Cl_2} \xrightarrow{t_0} z\mathrm{FeCl_3}$.

c) $x\mathrm{Fe} + y\mathrm{O_2} \xrightarrow{t_0} z\mathrm{Fe_2O_3}$.

d) $x\mathrm{Na_2SO_3} + 2\mathrm{KMnO_4} + y\mathrm{NaHSO_4} \xrightarrow{t_0} z\mathrm{Na_2SO_4} + 2\mathrm{MnSO_4} + \mathrm{K_2SO_4} + 3\mathrm{H_2O}$.

Câu 4: Một giáo viên dạy Hoá tạo 1 000 g dung dịch HCl 25% từ ba loại dung dịch HCl có nồng độ lần lượt là 10%, 20% và 30%. Tính khối lượng dung dịch mỗi loại. Biết rằng lượng HCl có trong dung dịch 10% bằng $\frac{1}{4}$ lượng HCl có trong dung dịch 20%.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Câu 5: Tổng số hạt p, n, e trong hai nguyên tử kim loại A và B là 177. Trong đó số hạt mang điện nhiều hơn số hạt không mang điện là 47. Số hạt mang điện của nguyên tử B nhiều hơn của nguyên tử A là 8. Xác định số hạt proton trong một nguyên tử A.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Câu 6: Một phân tử DNA có khối lượng là $72 \cdot 10^4$ đvC và có 2 826 liên kết hydrogen. Mạch 2 có số nucleotide (nu) loại A bằng 2 lần số nu loại T và bằng 3 lần số nu loại X. Xác định số nucleotide mỗi loại trên từng mạch của phân tử DNA đó. Biết rằng một nu có khối lượng trung bình là 300 đvC.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Câu 7: Tìm đa thức bậc ba $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + 1$ $(a \neq 0)$ biết $f(-1) = -2$, $f(1) = 2$, $f(2) = 7$.

....
....
....
....
....
....

Câu 8: Ba lớp 10A, 10B, 10C trồng được 164 cây bạch đàn và 316 cây thông. Mỗi học sinh lớp 10A trồng được 3 cây bạch đàn và 2 cây thông; mỗi học sinh lớp 10B trồng được 2 cây bạch đàn và 3 cây thông; mỗi học sinh lớp 10C trồng được 5 cây thông. Hỏi mỗi lớp có bao nhiêu học sinh? Biết số học sinh lớp 10A bằng trung bình cộng của số học sinh hai lớp 10B và 10C.

Câu 9: Độ cao h của một vật trong chuyển động được tính bởi công thức $h = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + h_0$, với độ cao h và độ cao ban đầu h_0 được tính bằng mét (m), t là thời gian của chuyển động tính bằng giây (s), a là gia tốc của chuyển động tính bằng $\mathrm{m/s^2}$, v_0 là vận tốc ban đầu tính bằng m/s. Tìm a, v_0, h_0. Biết rằng sau $1\,\mathrm{s}$ và $3\,\mathrm{s}$ vật cùng đạt được độ cao $50{,}225\,\mathrm{m}$; sau $2\,\mathrm{s}$ vật đạt độ cao $55{,}125\,\mathrm{m}$.

Câu 10: Một ngân hàng muốn đầu tư số tiền tín dụng là 100 tỉ đồng thu được vào ba nguồn: mua trái phiếu với mức sinh lời 8%/năm, cho vay thu lãi suất 10%/năm và đầu tư bất động sản với mức sinh lời 12%/năm. Theo điều kiện của quỹ tín dụng đề ra là tổng số tiền đầu tư vào trái phiếu và cho vay phải gấp ba lần số tiền đầu tư vào bất động sản. Nếu ngân hàng muốn thu được mức thu nhập 9,6 tỉ đồng hằng năm thì nên đầu tư như thế nào vào ba nguồn đó?

Bài 4. BÀI TẬP CUỐI CHUYÊN ĐỀ 1

A Kết nối tri thức

Bài 1: Giải các hệ phương trình sau.

a) $\begin{cases} x+y+z=6 \\ x+2y+3z=14 \\ 3x-2y-z=-4. \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x-2y+z=6 \\ 3x+2y+5z=7 \\ 7x+3y-6z=1. \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x+y-6z=1 \\ 3x+2y-5z=5 \\ 7x+4y-17z=7. \end{cases}$

d) $\begin{cases} 5x+2y-7z=6 \\ 2x+3y+2z=7 \\ 9x+8y-3z=1. \end{cases}$

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Bài 2: Tìm các số thực A, B và C thoả mãn

$$\frac{1}{x^3+1}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2-x+1}.$$

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Bài 3: Tìm parabol $y=ax^2+bx+c$ trong mỗi trường hợp sau

a) Parabol đi qua ba điểm $A(2;-1), B(4;3)$ và $C(-1;8)$;

b) Parabol nhận đường thẳng $x=\dfrac{5}{2}$ làm trục đối xứng và đi qua hai điểm $M(1;0), N(5;-4)$.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Bài 4: Trong mặt phẳng toạ độ, viết phương trình đường tròn đi qua ba điểm $A(0;1), B(2;3)$ và $C(4;1)$.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Bài 5: Một đoàn xe chở 255 tấn gạo tiếp tế cho đồng bào vùng bị lũ lụt. Đoàn xe có 36 chiếc gồm ba loại: xe chở 5 tấn, xe chở 7 tấn và xe chở 10 tấn. Biết rằng tổng số hai loại xe chở 5 tấn và chở 7 tấn nhiều gấp ba lần số xe chở 10 tấn. Hỏi mỗi loại xe có bao nhiêu chiếc?

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Bài 6: Bác An là chủ cửa hàng kinh doanh cà phê cho những người sành cà phê. Bác có ba loại cà phê nổi tiếng của Việt Nam: Arabica, Robusta và Moka với giá bán lần lượt là 320 nghìn đồng/kg, 280 nghìn đồng/kg và 260 nghìn đồng/kg. Bác muốn trộn ba loại cà phê này để được một hỗn hợp cà phê, sau đó đóng thành các gói 1 kg, bán với giá 300 nghìn đồng/kg và lượng cà phê Moka gấp đôi lượng cà phê Robusta trong mỗi gói. Hỏi bác cần trộn ba loại cà phê này theo tỉ lệ nào?

....
....
....
....
....
....
....
....

Bài 7: Bác Việt có 12 ha đất canh tác để trồng ba loại cây: ngô, khoai tây và đậu tương. Chi phí trồng 1 ha ngô là 4 triệu đồng, 1 ha khoai tây là 3 triệu đồng và 1 ha đậu tương là $4,5$ triệu đồng. Do nhu cầu thị trường, bác đã trồng khoai tây trên phần diện tích gấp đôi diện tích trồng ngô. Tổng chi phí trồng ba loại cây trên là $45,25$ triệu đồng. Hỏi diện tích trồng mỗi loại cây là bao nhiêu?

Bài 8: Cân bằng phương trình phản ứng hoá học sau

$$\mathrm{FeS_2} + \mathrm{O_2} \longrightarrow \mathrm{Fe_2O_3} + \mathrm{SO_2}$$

Bài 9: Bạn Mai có ba lọ dung dịch chứa một loại acid. Dung dịch A chứa 10%, dung dịch B chứa 30% và dung dịch C chứa 50% acid. Bạn Mai lấy từ mỗi lọ một lượng dung dịch và hoà với nhau để có 50 g hỗn hợp chứa 32% acid này, và lượng dung dịch loại C lấy nhiều gấp đôi dung dịch loại A. Tính lượng dung dịch mỗi loại bạn Mai đã lấy.

Bài 10:

Cho đoạn mạch như hình bên. Biết $R_1 = 36\Omega, R_2 = 45\Omega, I_3 = 1,5$ A là cường độ dòng điện trong mạch chính và hiệu điện thế giữa hai đầu đoạn mạch $U = 60$ V. Gọi I_1 và I_2 là cường độ dòng điện mạch rẽ. Tính I_1, I_2 và R_3.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Bài 11: Giải bài toán dân gian sau

Em đi chợ phiên
Anh gửi một tiền
Cam, thanh yên, quýt
Không nhiều thì ít
Mua đủ một trăm
Cam ba đồng một
Quýt một đồng năm
Thanh yên tươi tốt
Năm đồng một trái.

Hỏi mỗi thứ mua bao nhiêu trái, biết một tiền bằng 60 đồng?

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Bài 12: Một con ngựa giá 204 đồng(đơn vị tiền cổ). Có ba người muốn mua nhưng mỗi người không đủ tiền mua.
Người thứ nhất nói với hai người kia: "Mỗi anh cho tôi vay một nửa số tiền của mình thì tôi đủ tiền mua ngựa";
Người thứ hai nói: "Mỗi anh cho tôi vay một phần ba số tiền của mình, tôi sẽ mua được ngựa";
Người thứ ba lại nói: "Chỉ cần mỗi anh cho tôi vay một phần tư số tiền của mình thì con ngựa sẽ là của tôi".
Hỏi mỗi người có bao nhiêu tiền?

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

B Chân trời sáng tạo

Bài 1: Trong các hệ phương trình sau, hệ nào là hệ phương trình bậc nhất ba ẩn? Mỗi bộ ba số $(-1; 0; 1)$, $\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; -1\right)$ có là nghiệm của các hệ phương trình bậc nhất ba ẩn đó không?

a) $\begin{cases} 2x - y + z = -1 \\ -x + 2y = 1 \\ 3y - 2z = -2. \end{cases}$

b) $\begin{cases} 4x - 2y + z = 2 \\ 8x + 3z = 1 \\ -6y + 2z = 1. \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x - 2y + zx = 2 \\ xy - y + 2z = 1 \\ x + 2y - 3yz = -2. \end{cases}$

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Bài 2: Giải các hệ phương trình sau bằng phương pháp Gauss.

a) $\begin{cases} x - 2y + z = 3 \\ -y + z = 2 \\ y + 2z = 1. \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x - 2y - 4z = 3 \\ 4x + 6y - z = 17 \\ x + 2y = 5. \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 3x - y - z = 4 \\ x + 5y + 5z = -1. \end{cases}$

....
....
....
....
....
....
....
....

....
....

Bài 3: Tìm phương trình của parabol $(P): y = ax^2 + bx + c\,(a \neq 0)$, biết

a) Parabol (P) cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt có hoành độ lần lượt là $x = -2; x = 1$ và đi qua điểm $M(-1; 3)$;

b) Parabol (P) cắt trục tung tại điểm có tung độ $y = -2$ và hàm số đạt giá trị nhỏ nhất bằng -4 tại $x = 2$.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Bài 4: Một viên lam ngọc và hai viên hoàng ngọc trị giá gấp 3 lần một viên ngọc bích. Còn bảy viên lam ngọc và một viên hoàng ngọc trị giá gấp 8 lần một viên ngọc bích. Biết giá tiền của bộ ba viên ngọc này là 270 triệu đồng. Tính giá tiền mỗi viên ngọc.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Bài 5: Bốn ngư dân góp vốn mua chung một chiếc thuyền. Số tiền người đầu tiên đóng góp bằng một nửa tổng số tiền của những người còn lại. Người thứ hai đóng góp bằng $\dfrac{1}{3}$ tổng số tiền của những người còn lại. Người thứ ba đóng góp bằng $\dfrac{1}{4}$ tổng số tiền của những người còn lại. Người thứ tư đóng góp 130 triệu đồng. Chiếc thuyền này được mua giá bao nhiêu?

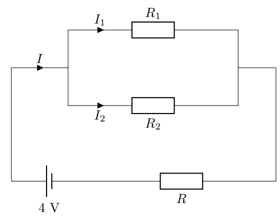
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Bài 6: Một quỹ đầu tư dự kiến dành khoản tiền $1,2$ tỉ đồng để đầu tư vào cổ phiếu. Để thấy được mức độ rủi ro, các cổ phiếu được phân thành ba loại: rủi ro cao, rủi ro trung bình và rủi ro thấp. Ban Giám đốc của quỹ ước tính các cổ phiếu nủi ro cao, rủi ro trung bình và rủi ro thấp sẽ có lợi nhuận hằng năm lần lượt là $15\%, 10\%$ và 6%. Nếu đặt ra mục tiêu đầu tư có lợi nhuận trung bình là 9% / năm trên tổng số vốn đầu tư, thì quỹ nên đầu tư bao nhiêu tiền vào mỗi loại cổ phiếu? Biết rằng, để an toàn, khoản đầu tư vào các cổ phiếu rủi ro thấp sẽ gấp đôi tổng các khoản đầu tư vào các cổ phiếu thuộc hai loại còn lại.

Bài 7: Ba loại tế bào A, B, C thực hiện số lần nguyên phân lần lượt là $3, 4, 5$ và tổng số tế bào con tạo ra là 216. Biết rằng khi chưa thực hiện nguyên phân, số tế bào loại C bằng trung bình cộng số tế bào loại A và loại B. Sau khi thực hiện nguyên phân, tổng số tế bào con loại A và loại B được tạo ra it hơn số tế bào con loại C được tạo ra là 40. Tính số tế bào con mỗi loại lúc ban đầu.

Bài 8:

Cho sơ đồ mạch điện như hình bên. Biết rằng $R = R_1 = R_2 = 5\Omega$. Hãy tính các cường độ dòng điện I, I_1 và I_2.



Bài 9: A, B và C là ba dung dịch cùng loại acid có nồng độ khác nhau. Biết rằng nếu trộn ba dung dịch mỗi loại 100 ml thì được dung dịch nồng độ $0,4M$(mol/lít); nếu trộn 100 ml dung dịch A với 200 ml dung dịch B thì được dung dịch nồng độ $0,6M$; nếu trộn 100 ml dung dịch B với 200 ml dung dịch C thì được dung dịch nồng độ $0,3$ M. Mỗi dung dịch A, B và C có nồng độ bao nhiêu?

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Bài 10: Xăng sinh học $E5$ là hỗn hợp xăng không chì truyền thống và cồn sinh học(bio-ethanol). Trong loại xăng này chứa 5% cồn sinh học. Khi động cơ đốt cháy lượng cồn trên thì xảy ra phản ứng hoá học

$$C_2H_6O + O_2 \xrightarrow{t^\circ} CO_2 + H_2O.$$

Cân bằng phương trinh hoá học trên.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Bài 11: Trên thị trường hàng hoá có ba loại sản phẩm A, B, C với giá mỗi tấn tương ứng là x, y, z(đơn vị: triệu đồng, $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$). Lượng cung và lượng cầu của mỗi sản phẩm được cho trong bảng dưới đây

Sản phẩm	Lượng cung	Lượng cầu
A	$Q_{S_A} = -60 + 4x - 2z$	$Q_{D_A} = 137 - 3x + y$
B	$Q_{S_B} = -30 - x + 5y - z$	$Q_{D_B} = 131 + x - 4y + z$
C	$Q_{S_C} = -30 - 2x + 3z$	$Q_{D_C} = 157 + y - 2z$

Tìm giá của mỗi sản phẩm để thị trường cân bằng.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Bài 12: Giải bài toán cổ sau

Trăm trâu, trăm cỏ
Trâu đứng ăn năm
Trâu nằm ăn ba
Lu khu trâu già
Ba con một bó

Hỏi có bao nhiêu con trâu đứng, trâu nằm, trâu già?

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Bài 5. ỨNG DỤNG HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT BA ẨN

A Giải bài toán bằng cách lập hệ phương trình

Phương pháp:

Bước 1: Lập hệ phương trình

Chọn ẩn là những đại lượng chưa biết.
Dựa trên ý nghĩa của các đại lượng chưa biết, đặt điều kiện cho ẩn.
Dựa vào dữ kiện của bài toán, lập hệ phương trình với các ẩn.

Bước 2: Giải hệ phương trình

Bước 3: Kiểm tra điều kiện của nghiệm và kết luận

Ví dụ 1: Giá vé vào xem một buổi biểu diễn xiếc gồm ba loại: 40 000 đồng dành cho trẻ em (dưới 6 tuổi), 60 000 đồng dành cho học sinh và 80 000 đồng dành cho người lớn. Tại buổi biểu diễn, 900 vé đã được bán ra và tổng số tiền thu được là 50 600 000 đồng. Người ta đã bán được bao nhiêu vé trẻ em, bao nhiêu vé học sinh và bao nhiêu vé người lớn cho buổi biểu diễn đó?

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Rèn luyện 1: Ba vận động viên Hùng, Dũng và Mạnh tham gia thi đấu nội dung ba môn phối hợp: chạy, bơi và đạp xe, trong đó tốc độ trung bình của họ trên mỗi chặng đua được cho ở bảng dưới đây.

Vận động viên	Tốc độ trung bình (km/h)		
	Chạy	Bơi	Đạp xe
Hùng	12,5	3,6	48
Dũng	12	3,75	45
Mạnh	12,5	4	45

Biết tổng thời gian thi đấu ba môn phối hợp của Hùng là 1 giờ 1 phút 30 giây, của Dũng là 1 giờ 3 phút 40 giây và của Mạnh là 1 giờ 1 phút 55 giây. Tính cự li của mỗi chặng đua.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

B Ứng dụng trong giải bài toán Vật lí, Hóa học, Sinh học

Ví dụ 1: Ba tế bào A, B, C sau một số lần nguyên phân tạo ra 88 tế bào con. Biết số tế bào B tạo ra gấp đôi số tế bào A tạo ra. Số lần nguyên phân của tế bào B ít hơn số lần nguyên phân của tế bào C là hai lần. Tính số lần nguyên phân của mỗi tế bào, biết rằng một tế bào sau một lần nguyên phân sẽ tạo ra hai tế bào mới giống tế bào ban đầu.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 2: Để nghiên cứu tác dụng của ba loại vitamin kết hợp với nhau, một nhà sinh vật học muốn mỗi con thỏ trong phòng thí nghiệm có chế độ ăn uống hàng ngày chứa chính xác 15 mg thiamine (B1), 40 mg riboflavin (B2) và 10 mg niacin (B3). Có ba loại thức ăn với hàm lượng vitamin được cho bởi bảng dưới đây

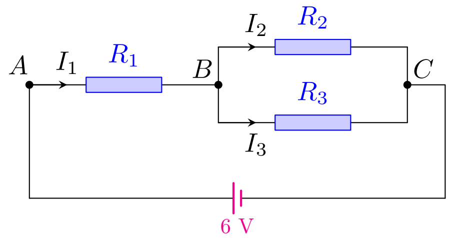
Loại vitamin	Hàm lượng vitamin (miligam) trong 100 g thức ăn		
	Loại I	Loại II	Loại III
Thiamine (B1)	3	2	2

Riboflavin (B2)	7	5	7
Niacin (B3)	2	2	1

Mỗi con thỏ cần phải được cung cấp bao nhiêu gam thức ăn mỗi loại trong một ngày?

Ví dụ 3:

Cho sơ đồ mạch điện như hình bên. Các điện trở có số đo lần lượt là $R_1 = 6\ \Omega$, $R_2 = 4\ \Omega$ và $R_3 = 3\ \Omega$. Tính các cường độ dòng điện I_1, I_2 và I_3.



Ví dụ 4: Cân bằng phương trình phản hứng hóa học khi đố cháy nhôm trong oxygen:

$$\mathrm{Al} + \mathrm{O_2} \xrightarrow{\mathrm{t^\circ}} \mathrm{Al_2O_3}.$$

Rèn luyện 2: Một nhà khoa học có ba dung dịch cùng một loại acid nhưng với nồng độ khác nhau là 10%, 20% và 40%. Trong một thí nghiệm, để tạo ra 100 ml dung dịch nồng độ 18%, nhà hóa học đã sử dụng lượng dung dịch nồng độ 10% gấp bốn lần lượng dung dịch nồng độ 40%. Tính số mililít dung dịch mỗi loại mà nhà hóa học đó đã sử dụng trong thí nghiệm này.

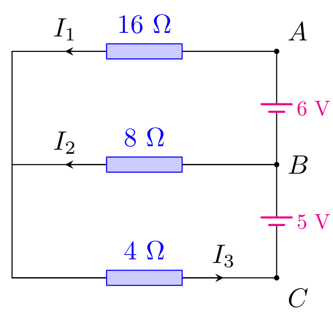
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Rèn luyện 3: Ba loại tế bào A, B, C thực hiện số lần nguyên phân lần lượt là 3, 4, 7 và tổng số tế bào con tạo ra là 480. Biết rằng khi chưa thực hiện nguyên phân, số tế bào loại B bằng tổng số tế bào loại A và loại C. Sau khi thực hiện nguyên phân, tổng số tế bào con loại A và loại C được tạo ra gấp năm lần số tế bào con loại B được tạo ra. Tính số tế bào con của mỗi loại lúc ban đầu.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Rèn luyện 4:

Cho sơ đồ mạch điện như hình bên. Tính các cường độ dòng điện I_1, I_2 và I_3.



....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

1 Ứng dụng trong giải bài toán kinh tế

Ví dụ 5: Một ông chủ trang trại có 24 ha đất canh tác dự định sử dụng để trồng khoai tây, bắp cải và su hào với chi phí đầu tư cho mỗi hecta lần lượt là 28 triệu đồng, 24 triệu đồng và 32 triệu đồng. Qua thăm dò thị trường, ông đã tính toán được diện tích đất trồng khoai tây cần gấp ba diện tích đất trồng bắp cải. Biết rằng ông có tổng nguồn vốn sử dụng để trồng ba loại cây trên là 688 triệu đồng. Tính diện tích đất cần sử dụng để trồng mỗi loại cây.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 6: Giả sử P_1, P_2, P_3 lần lượt là giá bán (gọi tắt là giá) mỗi kilogam thịt lợn, thịt bò và thịt gà trên thị trường. Qua khảo sát, người ta thấy rằng lượng cung (lượng sản phẩm được đưa vào thị trường để bán) của từng sản phẩm này phụ thuộc vào giá của nó theo công thức như sau

Sản phẩm	Thịt lợn	Thịt bò	Thịt gà
Lượng cung	$Q_{S_1} = -238 + 2P_1$	$Q_{S_2} = -247 + P_2$	$Q_{S_3} = -445 + 3P_3$

Qua khảo sát, người ta thấy lượng cầu (lượng sản phẩm mà người tiêu dùng có nhu cầu mua) của từng sản phẩm không phụ thuộc vào giá của sản phẩm mà còn phụ thuộc vào giá hai sản phẩm còn lại theo các công thức sau

Sản phẩm	Thịt lợn	Thịt bò	Thịt gà
Lượng cầu	$Q_{D_1} = 22 - P_1 + P_2 - P_3$	$Q_{D_2} = 283 + P_1 - P_2 - P_3$	$Q_{D_3} = 25 - P_1 + P_2 - P_3$

Ta nói *thị trường cân bằng* nếu lượng cung mỗi sản phẩm bằng lượng cầu của mỗi sản phẩm đó, tức là $Q_{S_1} = Q_{D_1}$, $Q_{S_2} = Q_{D_2}$ và $Q_{S_3} = Q_{D_3}$.
Giá của mỗi sản phẩm trên bằng bao nhiêu thì thị trường cân bằng?

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 7: Một nhà đầu tư dự định sử dụng 1 tỉ đồng để đầu tư vào ba loại trái phiếu: ngắn hạn, trung hạn và dài hạn. Biết lãi suất của ba loại trái phiếu ngắn hạn, trung hạn, dài hạn mỗi năm lần lượt là 3%, 4%, 5%. Người đó dự định sẽ đầu tư số tiền vào trái phiếu trung hạn gấp đôi số tiền đầu tư vào trái phiếu ngắn hạn với mong muốn nhận được tổng tiền lại trong năm đầu tiên là 4,2% số tiền đầu tự. Người đó nên đầu tư vào mỗi loại trái phiếu bao nhiêu tiền để đáp ứng được mong muốn của mình?

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Rèn luyện 5: Xét thị trường chè, cà phê và ca cao. Gọi x, y và z lần lượt là giá của 1 kg chè, 1 kg cà phê và 1 kg ca cao (đơn vị: nghìn đồng, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$). Các lượng cung và lượng cầu của mỗi sản phẩm được cho như bản sau

Sản phẩm	Lượng cung	Lượng cầu
Chè	$Q_{S_1} = -380 + x + y$	$Q_{D_1} = 350 - x - z$
Cà phê	$Q_{S_2} = -405 + x + 2y - z$	$Q_{D_2} = 760 - 2y - z$
Ca cao	$Q_{S_3} = -350 - 2x + 3z$	$Q_{D_3} = 145 - x + y - z$

Tìm giá của mỗi kilôgam chè, cà phê và ca cao để thị trường cân bằng.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Rèn luyện 6: Để mở rộng sản xuất, một công ty đã vay 800 triệu đồng từ ba ngân hàng A, B và C, với lãi suất cho vay theo năm lần lượt là 6%, 8% và 9%. Biết rằng tổng số tiền lãi năm đầu tiên công ty phải trả cho ba ngân hàng là 60 triệu đồng và số tiền lãi công ty trả cho hai ngân hàng A và C là bằng nhau. Tính số tiền công ty đã vay từ mỗi ngân hàng.

....
....
....
....
....
....
....

. . . .
. . . .
. . . .

Rèn luyện 7: Bác Nhân có 650 triệu đồng dự định gửi tiết kiệm vào các ngân hàng A, B và C. Biết các ngân hàng A, B, C trả lãi suất lần lượt là 8%/năm, 7,5%/năm và 7%/năm. Để phù hợp với nhu cầu, bác Nhân mong muốn sau một năm, tổng số tiền lãi bác nhận được là 50 triệu đồng và số tiền bác gửi vào ngân hàng B lớn hơn số tiền gửi vào ngân hàng C là 100 triệu đồng. Hãy tính giúp bác Nhân số tiền gửi vào mỗi ngân hàng sao cho đáp ứng được yêu cầu của bác.

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

Rèn luyện 8: Một công ty sản xuất ba loại phân bón

- Loại A có chứa 18% nitơ, 4% photphat và 5% kali;
- Loại B có chứa 20% nitơ, 4% photphat và 4% kali;
- Loại C có chứa 24% nitơ, 3% photphat và 6% kali;

Công ty sản xuất bao nhiêu kilôgam mỗi loại phân bón trên? Biết rằng công ty đã dùng hết 26 400 kg nitơ, 4 900 kg photphat, 6 200 kg kali.

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

Chương **2**

PHƯƠNG PHÁP QUY NẠP TOÁN HỌC VÀ NHỊ THỨC NEWTON

Bài 1. PHƯƠNG PHÁP QUY NẠP TOÁN HỌC

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Định lí 1 (Nguyên lí quy nạp): *Để chứng minh mệnh đề $P(n)$ đúng với mọi số tự nhiên $n \geq 1$, ta thực hiện 2 bước sau:*

- ***Bước 1:*** *Chứng tỏ mệnh đề đúng với $n = 1$.*
- ***Bước 2:*** *Với mọi số tự nhiên $k \geq 1$, ta giả sử $P(k)$ đúng ($P(k)$ gọi là giả thiết quy nạp), ta phải chứng tỏ $P(k+1)$ đúng.*

! Nếu bài toán cần chứng minh mệnh đề $P(n)$ đúng với mọi số tự nhiên $n \geq n_0$ thì ta phải thay thế số 1 trong nguyên lí trên thành n_0.

Ví dụ 1: Với mọi số tự nhiên $n \geq 1$, chứng minh rằng

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2. \qquad (1)$$

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 2: Chứng minh rằng bất đẳng thức $2^n > n^2$ đúng với mọi số tự nhiên $n \geq 5$.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Bài 1: Chứng minh rằng đẳng thức sau đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$:

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}. \qquad (1)$$

Bài 2: Chứng minh rằng bất đẳng thức sau đúng với mọi số tự nhiên $n \geq 3$

$$2^{n+1} > n^2 + n + 2. \qquad (1)$$

B Bài tập vận dụng

Ví dụ 1: Chứng minh rằng $3^{2n+2} - 8n - 9$ chia hết cho 64 với mọi $n \in \mathbb{N}^*$

Ví dụ 2: Trong mặt phẳng, cho $n\,(n \geq 2)$ đường thẳng, trong đó không có hai đường thẳng nào song song và không có ba đường thẳng nào đồng quy. Gọi S_n là tổng số giao điểm của n đường thẳng này.

a) Tính S_2, S_3, S_4, S_5 ứng với trường hợp có 2, 3, 4, 5 đường thẳng.

b) Từ đó, dự đoán công thức S_n và chứng minh công thức đó bằng phương pháp quy nạp.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Bài 3: Chứng minh rằng $n^3 + 2n$ chia hết cho 3 với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Bài 4: Chứng minh rằng đẳng thức sau đây đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$:

$$1 + q + q^2 + q^3 + \cdots + q^{n-1} = \frac{1 - q^n}{1 - q}, \qquad (q \neq 1).$$

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Bài 5: Chứng minh rằng trong mặt phẳng, n đường thẳng khác nhau cùng đi qua một điểm chia mặt phẳng ra thành $2n$ phần $n \in \mathbb{N}^*$.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Bài 6: (**Công thức lãi kép**) Một khoản tiền A đồng (gọi là vốn) được gửi tiết kiệm có kì hạn ở một ngân hàng theo thể thức lãi kép (tiền lãi sau mỗi kì hạn nếu không rút ra thì được cộng vào vốn của kì kế tiếp). Giả sử lãi suất theo kì là r không đổi qua các kì hạn, người gửi không rút tiền vốn và lãi trong suốt các kì hạn đề cập sau đây. Gọi T_n là tổng số tiền vốn và lãi của người gửi sau kì hạn thứ $n\,(n \in \mathbb{N}^*)$.

a) Tính T_1, T_2, T_3.

b) Từ đó, dự đoán công thức tính T_n và chứng minh công thức đó bằng phương pháp quy nạp toán học.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

C Bài tập

Bài 1: Chứng minh các đẳng thức sau đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

a) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + n \cdot (n+1) = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

b) $1 + 4 + 9 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

c) $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \cdots + 2^{n-1} = 2^n - 1$.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Bài 2: Chứng minh rằng, với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, ta có

a) $5^{2n} - 1$ chia hết cho 24.

b) $n^3 + 5n$ chia hết cho 6.

....
....
....
....

....
....
....
....
....
....

Bài 3: **(Bất đẳng thức Bernoulli)** Chứng minh rằng nếu $x > -1$ thì $(1+x)^n \geq 1 + nx$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Bài 4: Cho $a, b \geq 0$. Chứng minh rằng bất đẳng thức sau đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$

$$\frac{a^n + b^n}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^n.$$

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Bài 5: Chứng minh rằng bất đẳng thức sau đúng với mọi số tự nhiên $n \geq 2$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} > \frac{2n}{n+1}.$$

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Bài 6: Trong mặt phẳng, cho đa giác $A_1A_2A_3 \ldots A_n$ có n cạnh $(n \geq 3)$. Gọi S_n là tổng số đo các góc trong của đa giác.

a) Tính S_3, S_4, S_5 tương ứng với trường hợp đa giác là tam giác, tứ giác, ngũ giác.

b) Từ đó, dự đoán công thức tính S_n và chứng minh công thức đó bằng phương pháp quy nạp toán học.

Bài 7: Hàng tháng, một người gửi vào ngân hàng một khoản tiền tiết kiệm không đổi a đồng. Giả sử lãi suất hằng tháng là r không đổi và theo thể thức lãi kép (tiền lãi của tháng trước được cộng vào vốn của tháng kế tiếp). Gọi $T_n (n \geq 1)$ là tổng tiền vốn và lãi của người đó có trong ngân hàng tại thời điểm ngay sau khi gửi vào khoản thứ $n+1$.

a) Tính T_1, T_2, T_3.

b) Dự đoán công thức tính T_n và chứng minh công thức đó bằng phương pháp quy nạp toán học.

D BÀI TẬP

Giải các bài tập sách CTST

Bài 1: Một đại lí bán ba mẫu máy điều hoà A, B và C, với giá bán mỗi chiếc theo từng mẫu lần lượt là 8 triệu đồng, 10 triệu đồng và 12 triệu đồng. Tháng trước, đại lí bán được 100 chiếc gồm cả ba mẫu và thu được số tiền là 980 triệu đồng. Tính số lượng máy điều hoà mỗi mẫu đại lí bán được trong tháng trước, biết rằng số tiền thu được từ bán máy điều hoà mẫu A và mẫu C là bằng nhau.

....
....
....
....
....
....

Bài 2: Nhân dịp kỉ niệm ngày thành lập Đoàn Thanh niên Cộng sản Hồ Chí Minh, một trường Trung học phổ thông đã tổ chức cho học sinh tham gia các trò chơi. Ban tổ chức đã chọn 100 bạn và chia thành ba nhóm A, B, C để tham gia trò chơi thứ nhất. Sau khi trò chơi kết thúc, ban tổ chức chuyển $\frac{1}{3}$ số bạn ở nhóm A sang nhóm B ; $\frac{1}{2}$ số bạn ở nhóm B sang nhóm C; số bạn chuyển từ nhóm C sang nhóm A và B đều bằng $\frac{1}{3}$ số bạn ở nhóm C ban đầu. Tuy nhiên, người ta nhận thấy số bạn ở mỗi nhóm là không đổi qua hai trò chơi. Ban tổ chức đã chia mỗi nhóm bao nhiêu bạn?

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Bài 3: Một cửa hàng giải khát chỉ phục vụ ba loại sinh tố: xoài, bơ và mãng cầu. Để pha mỗi li (cốc) sinh tố này đều cần dùng đến sữa đặc, sữa tươi và sữa chua với công thức cho ở bảng sau.

Sinh tố (li)	Sữa đặc (ml)	Sữa tươi (ml)	Sữa chua (ml)
Xoài	20	100	30
Bơ	10	120	20
Mãng cầu	20	100	20

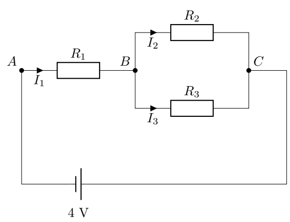
Ngày hôm qua cửa hàng đã dùng hết $2l$ sữa đặc; $12,8l$ sữa tươi và $2,9l$ sữa chua. Cửa hàng đã bán được bao nhiêu li sinh tố mỗi loại trong ngày hôm qua?

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Bài 4: Ba tế bào A, B, C sau một số lần nguyên phân tạo ra 168 tế bào con. Biết số tế bào A tạo ra gấp bốn lần số tế bào B tạo ra và số lần nguyên phân của tế bào C nhiều hơn số lần nguyên phân của tế bào B là bốn lần. Tính số lần nguyên phân của mỗi tế bào.

....

Bài 5:
Cho sơ đồ mạch điện như vẽ bên. Biết $R_1 = 4\Omega$, $R_2 = 4\Omega$ và $R_3 = 8\Omega$.
Tìm các cường độ dòng điện I_1, I_2 và I_3.



Bài 6: Cân bằng phương trình phản ứng khi đốt cháy khí methane trong oxygen:

$$CH_4 + O_2 \xrightarrow{t^\circ} CO_2 + H_2O.$$

Bài 7: Một nhà máy có ba bộ phận cắt, may, đóng gói để sản xuất ba loại sản phẩm: áo thun, áo sơ mi, áo khoác. Thời gian (tính bằng phút) của mỗi bộ phận để sản xuất 10 cái áo mỗi loại được thể hiện trong bảng sau:

Bộ phận	Thời gian (tính bằng phút) để sản xuất 10 cái		
	Áo thun	Áo sơ mi	Áo khoác
Cắt	9	12	15
May	22	24	28
Đóng gói	6	8	8

Các bộ phận cắt, may và đóng gói có tối đa 80, 160 và 48 giờ lao động tương ứng mỗi ngày. Hãy lập kế hoạch sản xuất để nhà máy hoạt động hết công suất.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Bài 8: Bà Hà có 1 tỉ đồng để đầu tư vào cổ phiếu, trái phiếu và gửi tiết kiệm ngân hàng. Cổ phiếu sinh lợi nhuận 12%/ năm, trong khi trái phiếu và gửi tiết kiệm ngân hàng cho lãi suất lần lượt là 8% /năm và 4% /năm. Bà Hà đã quy định rằng số tiền gửi tiết kiệm ngân hàng phải bằng tổng của 20% số tiền đầu tư vào cố phiếu và 10% số tiền đầu tư vào trái phiếu. Bà Hà nên phân bổ nguồn vốn của mình như thế nào để nhận được 100 triệu đồng tiền lãi từ các khoản đầu tư đó trong năm đầu tiên?

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Bài 9: Trên thị trường có ba loại sản phẩm A, B, C với giá mỗi tấn sản phẩm tương ứng là x, y, z (đơn vị: triệu đồng, $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$). Lượng cung và lượng cầu của mỗi sản phẩm được cho trong bảng dưới đây:

Sản phẩm	Lượng cung	Lượng cầu
A	$Q_{S_A} = 4x - y - z - 5$	$Q_{D_A} = -2x + y + z + 9$
B	$Q_{S_B} = -x + 4y - z - 5$	$Q_{D_B} = x - 2y + z + 3$
C	$Q_{S_C} = -x - y + 4z - 1$	$Q_{D_C} = x + y - 2z - 1$

Tìm giá bán của mỗi sản phẩm để thị trường cân bằng.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Bài 10: Tìm giá bán của mỗi sản phẩm để thị trường cân bằng. 10. Vé vào xem một vở kịch có ba mức giá khác nhau tuỳ theo khu vực ngồi trong nhà hát. Số lượng vé bán ra và doanh thu của ba suất diễn được cho bởi bảng sau:

Suất diễn	Số vé bán được			Doanh thu (triệu đồng)
	Khu vực 1	Khu vực 2	Khu vực 3	
10 h00 – 12 h00	210	152	125	212,7
15 h00 – 17 h00	225	165	118	224,4
20 h00 – 22 h00	254	186	130	252,2

Tìm giá vé ứng với mỗi khu vực ngồi trong nhà hát.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Bài 2. Nhị thức Newton

A Kết nối tri thức với cuộc sống

Bài 1: Sử dụng tam giác Pascal, viết khai triển:

a) $(x-1)^5$. **b)** $(2x-3y)^4$.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Bài 2: Viết khai triển theo nhị thức Newton:

a) $(x+y)^6$. **b)** $(1-2x)^5$.

....
....
....
....
....
....

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

Bài 3: Tìm hệ số của x^8 trong khai triển của $(2x+3)^{10}$.

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

Bài 4: Biết hệ số của x^2 trong khai triển của $(1-3x)^n$ là 90. Tìm n.

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

Bài 5: Từ khai triển biểu thức $(3x-5)^4$ thành đa thức, hãy tính tổng các hệ số của đa thức nhận được.

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

Bài 6: Tìm hệ số của x^5 trong khai triển thành đa thức của biểu thức $x(1-2x)^5+x^2(1+3x)^{10}$.

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

Bài 7: Tính tổng sau đây: $C_{2021}^{0} - 2C_{2021}^{1} + 2^2C_{2021}^{2} - 2^3C_{2021}^{3} + \cdots - 2^{2021}C_{2021}^{2021}$.

Bài 8: Tìm số tự nhiên n thoả mãn $C_{2n}^{0} + C_{2n}^{2} + C_{2n}^{4} + \cdots + C_{2n}^{2n} = 2^{2021}$.

Bài 9: Tìm số nguyên dương n sao cho $C_{n}^{0} + 2C_{n}^{1} + 4C_{n}^{2} + \cdots + 2^nC_{n}^{n} = 243$.

Bài 10: Biết rằng $(2+x)^{100} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{100}x^{100}$. Với giá trị nào của k $(0 \le k \le 100)$ thì a_k lớn nhất?

B Cánh diều

Bài 1: Khai triển các biểu thức sau:

a) $(2x+y)^6$. **b)** $(x-3y)^6$. **c)** $(x-1)^n$.

d) $(x+2)^n$. **e)** $(x+y)^{2n}$. **f)** $(x-y)^{2n}$.

trong đó n là số nguyên dương.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Bài 2: Tính:

a) $S = \mathrm{C}_{2022}^{0}9^{2022} + \mathrm{C}_{2022}^{1}9^{2021} + \cdots + \mathrm{C}_{2022}^{k}9^{2022-k} + \cdots + \mathrm{C}_{2022}^{2021}9 + \mathrm{C}_{2022}^{2022}$.

b) $T = \mathrm{C}_{2022}^{0}4^{2022} - \mathrm{C}_{2022}^{1}4^{2021}\cdot 3 + \cdots - \mathrm{C}_{2022}^{2021}4\cdot 3^{2021} + \mathrm{C}_{2022}^{2022}3^{2022}$.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Bài 3: Chứng minh:
$\mathrm{C}_n^0 3^n + \mathrm{C}_n^1 3^{n-1} + \cdots + \mathrm{C}_n^k 3^{n-k} + \cdots + \mathrm{C}_n^{n-1} 3 + \mathrm{C}_n^n = \mathrm{C}_n^0 + \mathrm{C}_n^1 3 + \cdots + \mathrm{C}_n^k 3^k + \cdots + \mathrm{C}_n^{n-1} 3^{n-1} + \mathrm{C}_n^n 3^n$
với $0 \le k \le n; k, n \in \mathbb{N}$.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Bài 4: Xác định hệ số của:

a) x^{12} trong khai triển của $(x+4)^{30}$.

b) x^{10} trong khai triển của $(3+2x)^{30}$.

c) x^{15} và x^{16} trong khai triển của $\left(\dfrac{2x}{3}-\dfrac{1}{7}\right)^{51}$.

Bài 5: Xét khai triển của $\left(x+\dfrac{5}{2}\right)^{12}$.

a) Xác định hệ số của x^7.

b) Nêu hệ số của x^k với $k\in\mathbb{N}, k\leq 12$.

Bài 6: Xét khai triển của $\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{5}\right)^{21}$.

a) Xác định hệ số của x^{10}.

b) Nêu hệ số của x^k với $k\in\mathbb{N}, k\leq 21$.

Bài 7: Tìm hệ số lớn nhất trong khai triển của:

a) $(a+b)^8$.

b) $(a+b)^9$.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Bài 8: Chứng minh công thức nhị thức Newton bằng phương pháp quy nạp:

$$(a+b)^n = \mathrm{C}_n^0 a^n + \mathrm{C}_n^1 a^{n-1}b + \cdots + \mathrm{C}_n^{n-1} ab^{n-1} + \mathrm{C}_n^n b^n \text{ với mọi } n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2.$$

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Bài 9: Bằng phương pháp quy nạp, chứng minh:

a) $n^5 - n$ chia hết cho 5 với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

b) $n^7 - n$ chia hết cho 7 với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Bài 10: Cho tập hợp $A = \{x_1; x_2; x_3; \ldots; x_n\}$ có n phần tử. Tính số tập hợp con của A.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Bài 11: Một nhóm gồm 10 học sinh tham gia chiến dịch Mùa hè xanh. Nhà trường muốn chọn ra một đội công tác có ít nhất hai học sinh trong những học sinh trên. Hỏi có bao nhiêu cách lập đội công tác như thế?

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Bài 12: Để tham gia một cuộc thi làm bánh, bạn Tiến làm 12 chiếc bánh có màu khác nhau và chọn ra số nguyên dương chẵn chiếc bánh để cho vào một hộp trưng bày. Hỏi bạn Tiến có bao nhiêu cách để chọn bánh cho vào hộp trưng bày đó?

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Bài 13: Bác Thành muốn mua quà cho con nhân dịp sinh nhật nên đã đến một cửa hàng đồ chơi. Bác dự định chọn một trong năm loại đồ chơi. Ở cửa hàng, mỗi loại đồ chơi đó chỉ có 10 sản phẩm khác nhau bày bán.

Biết rằng nếu mua bộ trực thăng điều khiển từ xa, bác sẽ chỉ mua 1 sản phẩm; nếu mua bộ đồ chơi lego, bác sẽ mua 3 sản phẩm khác nhau; nếu mua bộ lắp ghép robot chạy bằng năng lượng mặt trời, bác sẽ mua 5 sản phẩm khác nhau; nếu mua rubik, bác sẽ mua 7 sản phẩm khác nhau; còn nếu mua mô hình khủng long, bác sẽ mua 9 sản phẩm khác nhau. Bác Thành có bao nhiêu cách chọn quà sinh nhật cho con?

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Bài 14: Giả sử tính trạng ở một loài cây được quy định do tác động cộng gộp của n cặp alen phân li độc lập $A_1a_1, A_2a_2, \ldots, A_na_n$. Cho cây F_1 dị hợp về n cặp alen giao phối với nhau. Tỉ lệ phân li kiểu hình của F_2 là hệ số của khai triển nhị thức Newton $(a+b)^{2n}$, nghĩa là tỉ lệ phân li kiểu hình của F_2 là $\mathrm{C}_{2n}^0 : \mathrm{C}_{2n}^1 : \mathrm{C}_{2n}^2 : \ \ldots : \mathrm{C}_{2n}^{2n-2} : \mathrm{C}_{2n}^{2n-1} : \mathrm{C}_{2n}^{2n}$. Cho biết một loài cây có tính trạng được quy định bởi tác động cộng gộp của 4 cặp alen phân li độc lập. Tìm tỉ lệ phân li kiểu hình của F_2 nếu cây F_1 dị hợp về 4 cặp alen giao phối với nhau.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Bài 3. PHƯƠNG PHÁP QUY NẠP TOÁN HỌC

A LUYỆN TẬP 1

Giải các bài tập sách KNTT

Bài 1: Sử dụng phương pháp quy nạp toán học, chứng minh các đẳng thức sau đúng với mọi số tự nhiên $n \geq 1$.

a) $2 + 4 + 6 + \cdots + 2n = n(n+1)$.

b) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Bài 2: Mỗi khẳng định sau là đúng hay sai? Nếu em nghĩ là nó đúng, hãy chứng minh nó. Nếu em nghĩ là nó sai, hãy đưa ra một phản ví dụ.

a) $p(n) = n^2 - n + 11$ là số nguyên tố với mọi số tự nhiên n;

b) $n^2 > n$ với mọi số tự nhiên $n \geq 2$.

....
....
....
....
....
....
....

....
....
....

Bài 3: Chứng minh rằng $n^3 - n + 3$ chia hết cho 3 với mọi số tự nhiên $n \geq 1$.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Bài 4: Chứng minh rằng $n^2 - n + 41$ là số lẻ với mọi số nguyên dương n.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Bài 5: Chứng minh rằng nếu $x > -1$ thì $(1 + x)^n \geq 1 + nx$ với mọi số tự nhiên n.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Bài 6: Cho tổng $S_n = \dfrac{1}{1 \cdot 2} + \dfrac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \dfrac{1}{n(n+1)}$.

a) Tính S_1, S_2, S_3

b) Dự đoán công thức tính tổng S_n và chứng minh bằng quy nạp.

....
....
....
....
....
....
....

....
....
....

Bài 7: Sử dụng phương pháp quy nạp toán học, chứng minh rằng số đường chéo của một đa giác n cạnh $(n \geq 4)$ là $\dfrac{n(n-3)}{2}$.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Bài 8: Ta sẽ "lập luận" bằng quy nạp toán học để chỉ ra rằng: "Mọi con mèo đều có cùng màu".
Ta gọi $P(n)$ với n nguyên dương là mệnh đề sau: "Mọi con mèo trong một đàn gồm n con đều có cùng màu".
Bước 1. Với $n = 1$ thì mệnh đề $P(1)$ là "Mọi con mèo trong một đàn gồm 1 con đều có cùng màu". Hiển nhiên mệnh đề này là đúng!
Bước 2. Giả sử $P(k)$ đúng với một số nguyên dương $k \geq 1$ nào đó. Xét một đàn mèo gồm $k+1$ con.
Gọi chúng là $M_1, M_2, \ldots, M_{k+1}$. Bỏ con mèo M_{k+1} ra khỏi đàn, ta nhận được một đàn mèo gồm k con là $M_1, M_2, \ldots, M_k$.
Theo giả thiết quy nạp, các con mèo có cùng màu.
Bây giờ, thay vì bỏ con mèo M_{k+1}, ta bỏ con mèo M_1 để có đàn mèo gồm k con là $M_2, M_3, \ldots, M_{k+1}$.
Vẫn theo giả thiết quy nạp thì các con mèo $M_2, M_3, \ldots, M_{k+1}$ có cùng màu.
Cuối cùng, đưa con mèo M_1 trở lại đàn để có đàn mèo ban đầu. Theo các lập luận trên: các con mèo $M_1, M_2, \ldots, M_k$ có cùng màu và các con mèo $M_2, M_3, \ldots, M_{k+1}$ có cùng màu. Từ đó suy ra tất cả các con mèo $M_1, M_2, \ldots, M_{k+1}$ đều có cùng màu.
Vậy, theo nguyên lí quy nạp thì $P(n)$ đúng với mọi số nguyên dương n. Nói riêng, nếu gọi N là số mèo hiện tại trên Trái Đất thì việc $P(n)$ đúng cho thấy tất cả các con mèo (trên Trái Đất) đều có cùng màu!
Tất nhiên là ta có thể tìm được các con mèo khác màu nhau! Theo em thì "lập luận" trên đây sai ở chỗ nào?

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

B LUYỆN TẬP 2

Giải các bài tập sách CD

Bài 1: Cho $S_n = 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^n$ và $T_n = 2^{n+1} - 1$, với $n \in \mathbb{N}^*$.

a) So sánh S_1 và T_1; S_2 và T_2; S_3 và T_3.

b) Dự đoán công thức tính S_n và chứng minh bằng phương pháp quy nạp toán học.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Bài 2: Cho $S_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^2} + \cdots + \dfrac{1}{2^n}$ và $T_n = 2 - \dfrac{1}{2^n}$, với $n \in \mathbb{N}^*$.

a) So sánh S_1 và T_1; S_2 va T_2; S_3 và T_3.

b) Dự đoán công thức tính S_n và chứng minh bằng phương pháp quy nạp toán học.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Bài 3: Cho $S_n = \dfrac{1}{1 \cdot 5} + \dfrac{1}{5 \cdot 9} + \dfrac{1}{9 \cdot 13} + \ldots + \dfrac{1}{(4n-3)(4n+1)}$, vơi $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Tính S_1, S_2, S_3, S_4.

b) Dự đoán công thức tính S_n và chứng minh bằng phương pháp quy nạp toán học.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Bài 4: Cho q là số thực khác 1 . Chứng minh: $1+q+q^2+\ldots+q^{n-1}=\dfrac{1-q^n}{1-q}$, với $n \in \mathbb{N}^*$.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Bài 5: Chứng minh với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, ta có

a) $4^n+15n-1$ chia hết cho 9 ;

b) 13^n-1 chia hết cho 6.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

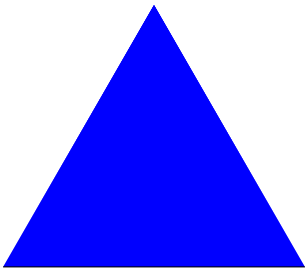
Bài 6: Chứng minh $n^n>(n+1)^{n-1}$ với $n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2$.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

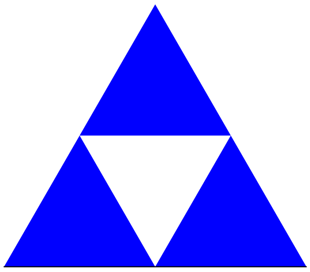
Bài 7: Chứng minh $a^n-b^n=(a-b)\left(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1}\right)$ với $n \in \mathbb{N}^*$.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

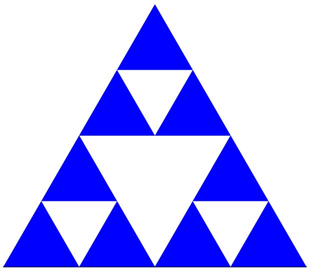
Bài 8: Cho tam giác đều màu xanh (Hình thứ nhất).



Hình thứ nhất



Hình thứ hai



Hình thứ ba

a) Nêu quy luật chọn tam giác đều màu trắng ở Hình thứ hai.

b) Nêu quy luật chọn các tam giác đều màu trắng ở Hình thứ ba.

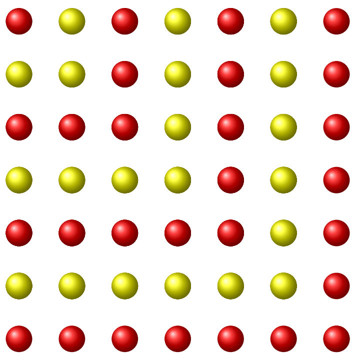
c) Nêu quy luật tiếp tục chọn các tam giác đều màu trắng từ Hình thứ tư và các tam giác đều màu trắng ở những hình sau đó.

d) Tính số tam giác đều màu xanh lần lượt trong các Hình thư nhất, Hình thứ hai, Hình thú ba.

e) Dự đoán số tam giác đều màu xanh trong Hình thứ n. Chứng minh kết quả đó bằng phương pháp quy nạp toán học.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Bài 9: Quan sát Hình dưới đây.



a) Nêu quy luật sắp xếp các chấm đỏ và vàng xen kẽ nhau khi xếp các chấm đó từ góc trên bên trái xuống góc dưới bên phải (tạo thành hình vuông).

b) Giả sử hình vuông thứ n có mỗi cạnh chứa n chấm. Tính tổng số chấm được xếp trong hình vuông (kể cả trên cạnh). Chứng minh kết quả đó bằng phương pháp quy nạp toán học.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Bài 10: Giả sử năm đầu tiên, cô Hạnh gửi vào ngân hàng A (đồng) vời lãi suất $r\%$/năm. Hết năm đầu tiên, cô Hạnh không rút tiền ra và gửi thêm A (đồng) nữa. Hết năm thứ hai, cô Hạnh cũng không rút tiền ra và lại gửi thêm A (đồng) nữa. Cứ tiếp tục như vậy cho những năm sau. Chứng minh số tiền cả vồn lẫn lãi mà cô Hạnh có được sau n (năm) là $T_n = \dfrac{A(100+r)}{r}\left[\left(1+\dfrac{r}{100}\right)^n - 1\right]$ (đồng), nếu trong khoảng thời gian này lãi suất không thay đổi.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Bài 11: Một người gửi số tiền A (đồng) vào ngân hàng. Biểu lãi suất của ngân hàng như sau: Chia mỗi năm thành m kì hạn và lãi suất $r\%$ /năm. Biết rằng nếu không rưt tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi kì hạn, số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn ban đầu. Chứng minh số tiền nhận được (bao gồm cả vốn lẫn lãi) sau n (năm) gửi là $S_n = A\left(1+\dfrac{r}{100m}\right)^{m\cdot n}$ (đồng), nếu trong khoảng thời gian này người gửi không rút tiền ra và lãi suất không thay đổi.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Bài 4. Nhị thức Newton

Từ khoá: Nhị thức Newton; Tam giác Pascal.
Ta đã có công thức

$$(a+b)^n = \mathrm{C}_n^0 a^n + \mathrm{C}_n^1 a^{n-1}b + \cdots + \mathrm{C}_n^k a^{n-k}b^k + \cdots + \mathrm{C}_n^{n-1} ab^{n-1} + \mathrm{C}_n^n b^n$$

trong trường hợp $n = 1, 2, 3, 4, 5$.
Công thức này có đúng với mọi số tự nhiên n không? Làm thế nào để kiểm tra?

A Công thức nhị thức Newton

Có ba hộp, mỗi hộp đựng hai quả cầu được dán nhãn a và b. Lấy từ mỗi hộp một quả cầu. Có bao nhiêu cách lấy để trong ba quả cầu lấy ra

a) có 3 quả cầu dán nhãn b?

b) có 2 quả cầu dán nhãn b?

c) có 1 quả cầu dán nhãn b?

d) không có quả cầu nào dán nhãn b?

Bằng lập luận tương tự như -1, ta có thể sử dụng tổ hợp để tìm các hệ số của công thức khai triển

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Thật vậy, ta có khai triển

$$\begin{aligned}(a+b)^3 &= (a+b)(a+b)(a+b)\\ &= (aa+ab+ba+bb)(a+b)\\ &= aaa+aab+aba+abb+baa+bab+bba+bbb\\ &= aaa+(aab+aba+baa)+(abb+bab+bba)+bbb\\ &= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3.\end{aligned}$$

Trong khai triển trên, để nhận được số hạng b^3, ta lấy số hạng b trong thừa số $(a+b)$ thứ nhất nhân với số hạng b trong thừa số $(a+b)$ thứ hai, rồi nhân với số hạng b trong thừa số $(a+b)$ thứ ba. Do đó, hệ số của b^3 bằng số cách chọn ba chữ b từ ba chữ b có trong ba thừa số $(a+b)$, tức bằng $\mathrm{C}_3^3 = 1$.
Tiếp theo, xét số hạng $3ab^2$ hay tổng $abb + bab + bba$. Để nhận được mỗi số hạng của tổng này, ta lấy tích của hai số hạng b từ hai thừa số $(a+b)$, rồi nhân với số hạng a của thừa số $(a+b)$ còn lại. Do đó, hệ số của ab^2 bằng số cách chọn hai chữ b từ ba chữ b có trong ba thừa số $(a+b)$, tức bằng $\mathrm{C}_3^2 = 3$.
Lập luận tương tự, ta được hệ số của a^2b bằng $\mathrm{C}_3^1 = 3$, hệ số của a^3 bằng $\mathrm{C}_3^0 = 1$. Từ đó, ta nhận được

$$(a+b)^3 = \mathrm{C}_3^0 a^3 + \mathrm{C}_3^1 a^2b + \mathrm{C}_3^2 ab^2 + \mathrm{C}_3^3 b^3.$$

Một cách tổng quát, với số tự nhiên bất kì $n \geq 1$, ta có thể mở rộng lập luận ở trên để tìm các hệ số trong khai triển biểu thức:

$$(a+b)^n = \underbrace{(a+b)(a+b)\cdots(a+b)}_{n \text{ thừa số}}.$$

Khai triển biểu thức này, ta nhận được các số hạng dạng $\alpha_k a^{n-k} b^k$ với α_k là hệ số, $k = 0, 1, \cdots, n$.
Hệ số α_k bằng số cách chọn k chữ b từ n chữ b có trong n thừa số $(a + b)$.
Nghĩa là, $\alpha_k = \mathrm{C}_n^k$ với $(0 \le k \le n)$.
Từ đó, ta nhận được kết quả

Định nghĩa. Với mỗi số tự nhiên n, ta có

$$(a+b)^n = \mathrm{C}_n^0 a^n + \mathrm{C}_n^1 a^{n-1} b + \cdots + \mathrm{C}_n^k a^{n-k} b^k + \cdots + \mathrm{C}_n^{n-1} a b^{n-1} + \mathrm{C}_n^n b^n. \quad (1)$$

Công thức (1) được gọi là công thức nhị thức Newton, gọi tắt là nhị thức Newton.

!

- Trong cách viết vế phải của (1), số hạng $\mathrm{C}_n^k a^{n-k} b^k (0 \le k \le n)$ được gọi là số hạng tổng quát.
- Vế phải của (1) gồm $n + 1$ số hạng. Đi qua các số hạng từ trái sang phải, số mũ của a giảm dần, số mũ của b tăng dần, nhưng tổng của chúng không đổi và bằng n (quy ước $(a^0 = b^0 = 1)$.

Ví dụ 1: Hãy khai triển $(x + 2)^6$.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Rèn luyện 1: Hãy khai triển

a) $(1 + x)^7$.

b) $(x - y)^6$.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

B Tam giác Pascal

Từ các công thức khai triển:

$$\begin{aligned}
&(a+b)^0 = 1\\
&(a+b)^1 = a+b\\
&(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2\\
&(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3\\
&(a+b)^4 = a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4\\
&(a+b)^5 = a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5
\end{aligned}$$

các hệ số được viết thành bảng số như Hình 2 sau đây. Nếu sử dụng kí hiệu tổ hợp thì nhận được bảng như Hình 3 . Từ các đẳng thức như

$$\begin{array}{ll}
\mathrm{C}_3^0 = \mathrm{C}_3^3 = 1, & \mathrm{C}_4^1 = \mathrm{C}_4^3 = 4,\\
\mathrm{C}_3^0 + \mathrm{C}_3^1 = \mathrm{C}_4^1, & \mathrm{C}_4^2 + \mathrm{C}_4^3 = \mathrm{C}_5^3,
\end{array}$$

có thể dự đoán rằng, với mỗi $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{array}{ll}
\mathrm{C}_n^k = \mathrm{C}_n^{n-k} & (0 \le k \le n);\\
\mathrm{C}_n^{k-1} + \mathrm{C}_n^k = \mathrm{C}_{n+1}^k & (1 \le k \le n).
\end{array}$$

Hãy chứng minh các công thức trên. Gợi ý: Sử dụng công thức $\mathrm{C}_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}, n \in \mathbb{N}, 0 \le k \le n$.
Sử dụng công thức (3), với lưu ý rằng $\mathrm{C}_n^0 = \mathrm{C}_n^n = 1$ với mọi $n \in \mathbb{N}$, từ bảng số ở Hình 2 , ta có thể viết tiếp lần lượt từng hàng số để tạo thành một bảng số, được gọi là tam giác Pascal (xem Hình 4).

$$\begin{array}{c}
\mathrm{C}_1^0 \quad \mathrm{C}_1^1\\
\mathrm{C}_2^0 \quad \mathrm{C}_2^1 \quad \mathrm{C}_2^2\\
\mathrm{C}_3^0 \quad \mathrm{C}_3^1 \quad \mathrm{C}_3^2 \quad \mathrm{C}_3^3\\
\mathrm{C}_4^0 \quad \mathrm{C}_4^1 \quad \mathrm{C}_4^2 \quad \mathrm{C}_4^3 \quad \mathrm{C}_4^4\\
\mathrm{C}_5^0 \quad \mathrm{C}_5^1 \quad \mathrm{C}_5^2 \quad \mathrm{C}_5^3 \quad \mathrm{C}_5^4 \quad \mathrm{C}_5^5
\end{array}$$

$$\begin{array}{l|c}
n=0 & 1\\
n=1 & 1 \quad 1\\
n=2 & 1 \quad 2 \quad 1\\
n=3 & 1 \quad 3 \quad 3 \quad 1\\
n=4 & 1 \quad 4 \searrow \quad \swarrow 6 \searrow \quad \swarrow 4 \quad 1\\
n=5 & 1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1
\end{array}$$

Trong thực hành, tam giác Pascal giúp ta nhanh chóng xác định các hệ số khi khai triển nhị thức Newton.

Ví dụ 1: Sử dụng tam giác Pascal, hãy khai triển $(x-1)^7$.

....

....

....
....
....
....
....
....
....
....

Rèn luyện 2: Sử dụng tam giác Pascal, hãy khai triển

a) $(x-y)^7$;

b) $(2x+1)^6$.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

C Vận dụng công thức nhị thức Newton

Công thức nhị thức Newton với các dạng mở rộng của nó có nhiều ứng dụng quan trọng trong toán học. Dưới đây, ta xét thêm vài ví dụ đơn giản.

Ví dụ 1: Xác định hệ số của x^4y^6 trong khai triển $(2x-y)^{10}$.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 2: Cho a là một số thực dương. Biết rằng trong khai triển $(3x+a)^8$, hệ số của x^4 là 70 . Hãy tìm giá trị của a.

....
....
....
....
....
....
....
....

....
....

Ví dụ 3: Chứng minh rằng đẳng thức sau đây đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathrm{C}_n^0 + \mathrm{C}_n^1 + \mathrm{C}_n^2 + \cdots + \mathrm{C}_n^n = 2^n.$$

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Nhận xét: Từ công thức khai triển

$$(x+a)^n = \mathrm{C}_n^0 x^n + \mathrm{C}_n^1 x^{n-1}a + \cdots + \mathrm{C}_n^k x^{n-k}a^k + \cdots + \mathrm{C}_n^{n-1} x a^{n-1} + \mathrm{C}_n^n a^n,$$

với mỗi cách chọn giá trị của x và a, ta nhận được một hệ thức liên quan đến các hệ số tổ hợp $\mathrm{C}_n^0, \mathrm{C}_n^1, \cdots, \mathrm{C}_n^n$.

Ví dụ 4: Cho tập hợp $A = \{a_1; a_2; \cdots; a_n\}$ có n phần tử. Tập hợp A có bao nhiêu tập con?

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Rèn luyện 3: Xác định hệ số của x^2 trong khai triển $(3x+2)^9$.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Rèn luyện 4: Biết rằng trong khai triển $(x+a)^6$ với a là một số thực, hệ số của x^4 là 60. Tìm giá trị của a.

....

....
....
....
....
....
....
....
....
....

Rèn luyện 5: Chứng minh rằng, với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, ta có

$$\mathrm{C}_n^0 - \mathrm{C}_n^1 + \mathrm{C}_n^2 - \mathrm{C}_n^3 + \cdots + (-1)^n \mathrm{C}_n^n = 0.$$

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Rèn luyện 6: Trong hộp A có 10 quả cầu được đánh số từ 1 đến 10 . Người ta lấy một số quả cầu từ hộp A rồi cho vào hộp B. Có tất cả bao nhiêu cách lấy, tính cả trường hợp lấy không quả (tức không lấy quả nào)?

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

D BÀI TẬP

Bài 1: Khai triển biểu thức

a) $(x - 2y)^6$,

b) $(3x - 1)^5$.

....
....
....
....
....

Bài 2: Tìm hệ số của x^{10} trong khai triển của biểu thức $(2-x)^{12}$.

Bài 3: Biết rằng a là một số thực khác 0 và trong khai triển của $(ax+1)^6$, hệ số của x^4 gấp bốn lần hệ số của x^2. Tìm giá trị của a.

Bài 4: Biết rằng hệ số của x^2 trong khai triển của $(1+3x)^n$ là 90. Tìm giá trị của n.

Bài 5: Chứng minh công thức nhị thức Newton bằng phương pháp quy nạp toán học.

$$(a+b)^n = \mathrm{C}_n^0 a^n + \mathrm{C}_n^1 a^{n-1} b + \cdots + \mathrm{C}_n^k a^{n-k} b^k + \cdots + \mathrm{C}_n^{n-1} a b^{n-1} + \mathrm{C}_n^n b^n.$$

....
....
....
....

Bài 6: Biết rằng $(3x-1)^7 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + a_6x^6 + a_7x^7$. Hãy tính:

a) $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7$.

b) $a_0 + a_2 + a_4 + a_6$.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Bài 7: Một tập hợp có 12 phần tử thì có tất cả bao nhiêu tập hợp con?

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Bài 8: Từ 15 bút chì màu có màu khác nhau đôi một.

a) Có bao nhiêu cách chọn ra một số bút chì màu, tính cả trường hợp không chọn cái nào?

b) Có bao nhiêu cách chọn ra ít nhất 8 bút chì màu?

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Bài 5. Nhị thức Newton

A Kết nối tri thức với cuộc sống

Bài 1: Sử dụng tam giác Pascal, viết khai triển:

a) $(x-1)^5$.

b) $(2x-3y)^4$.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Bài 2: Viết khai triển theo nhị thức Newton:

a) $(x+y)^6$.

b) $(1-2x)^5$.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Bài 3: Tìm hệ số của x^8 trong khai triển của $(2x+3)^{10}$.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Bài 4: Biết hệ số của x^2 trong khai triển của $(1-3x)^n$ là 90. Tìm n.

....

....

....

....

....

....
....
....
....
....

Bài 5: Từ khai triển biểu thức $(3x-5)^4$ thành đa thức, hãy tính tổng các hệ số của đa thức nhận được.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Bài 6: Tìm hệ số của x^5 trong khai triển thành đa thức của biểu thức $x(1-2x)^5+x^2(1+3x)^{10}$.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Bài 7: Tính tổng sau đây: $\mathrm{C}_{2021}^0-2\mathrm{C}_{2021}^1+2^2\mathrm{C}_{2021}^2-2^3\mathrm{C}_{2021}^3+\cdots-2^{2021}\mathrm{C}_{2021}^{2021}$.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Bài 8: Tìm số tự nhiên n thoả mãn $\mathrm{C}_{2n}^0+\mathrm{C}_{2n}^2+\mathrm{C}_{2n}^4+\cdots+\mathrm{C}_{2n}^{2n}=2^{2021}$.

....
....
....
....
....
....
....
....

....
....

Bài 9: Tìm số nguyên dương n sao cho $C_n^0 + 2C_n^1 + 4C_n^2 + \cdots + 2^n C_n^n = 243$.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Bài 10: Biết rằng $(2+x)^{100} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{100}x^{100}$. Với giá trị nào của k $(0 \leq k \leq 100)$ thì a_k lớn nhất?

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

B Cánh diều

Bài 1: Khai triển các biểu thức sau:

a) $(2x+y)^6$.   **b)** $(x-3y)^6$.   **c)** $(x-1)^n$.

d) $(x+2)^n$.   **e)** $(x+y)^{2n}$.   **f)** $(x-y)^{2n}$.

trong đó n là số nguyên dương.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Bài 2: Tính:

a) $S = C_{2022}^0 9^{2022} + C_{2022}^1 9^{2021} + \cdots + C_{2022}^k 9^{2022-k} + \cdots + C_{2022}^{2021} 9 + C_{2022}^{2022}$.

b) $T = C_{2022}^0 4^{2022} - C_{2022}^1 4^{2021} \cdot 3 + \cdots - C_{2022}^{2021} 4 \cdot 3^{2021} + C_{2022}^{2022} 3^{2022}$.

Bài 3: Chứng minh:
$C_n^0 3^n + C_n^1 3^{n-1} + \cdots + C_n^k 3^{n-k} + \cdots + C_n^{n-1} 3 + C_n^n = C_n^0 + C_n^1 3 + \cdots + C_n^k 3^k + \cdots + C_n^{n-1} 3^{n-1} + C_n^n 3^n$
với $0 \leq k \leq n; k, n \in \mathbb{N}$.

Bài 4: Xác định hệ số của:

a) x^{12} trong khai triển của $(x+4)^{30}$.

b) x^{10} trong khai triển của $(3+2x)^{30}$.

c) x^{15} và x^{16} trong khai triển của $\left(\dfrac{2x}{3} - \dfrac{1}{7}\right)^{51}$.

Bài 5: Xét khai triển của $\left(x + \dfrac{5}{2}\right)^{12}$.

a) Xác định hệ số của x^7.

b) Nêu hệ số của x^k với $k \in \mathbb{N}, k \leq 12$.

. . . .

Bài 6: Xét khai triển của $\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{5}\right)^{21}$.

a) Xác định hệ số của x^{10}.

b) Nêu hệ số của x^k với $k \in \mathbb{N}, k \le 21$.

. . . .

Bài 7: Tìm hệ số lớn nhất trong khai triển của:

a) $(a+b)^8$.

b) $(a+b)^9$.

. . . .

Bài 8: Chứng minh công thức nhị thức Newton bằng phương pháp quy nạp:

$$(a+b)^n = \mathrm{C}_n^0 a^n + \mathrm{C}_n^1 a^{n-1} b + \cdots + \mathrm{C}_n^{n-1} a b^{n-1} + \mathrm{C}_n^n b^n \text{ với mọi } n \in \mathbb{N}^*, n \ge 2.$$

. . . .

Bài 9: Bằng phương pháp quy nạp, chứng minh:

a) $n^5 - n$ chia hết cho 5 với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. **b)** $n^7 - n$ chia hết cho 7 với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Bài 10: Cho tập hợp $A = \{x_1; x_2; x_3; \ldots; x_n\}$ có n phần tử. Tính số tập hợp con của A.

Bài 11: Một nhóm gồm 10 học sinh tham gia chiến dịch Mùa hè xanh. Nhà trường muốn chọn ra một đội công tác có ít nhất hai học sinh trong những học sinh trên. Hỏi có bao nhiêu cách lập đội công tác như thế?

Bài 12: Để tham gia một cuộc thi làm bánh, bạn Tiến làm 12 chiếc bánh có màu khác nhau và chọn ra số nguyên dương chẵn chiếc bánh để cho vào một hộp trưng bày. Hỏi bạn Tiến có bao nhiêu cách để chọn bánh cho vào hộp trưng bày đó?

. . . .
. . . .

Bài 13: Bác Thành muốn mua quà cho con nhân dịp sinh nhật nên đã đến một cửa hàng đồ chơi. Bác dự định chọn một trong năm loại đồ chơi. Ở cửa hàng, mỗi loại đồ chơi đó chỉ có 10 sản phẩm khác nhau bày bán.

Biết rằng nếu mua bộ trực thăng điều khiển từ xa, bác sẽ chỉ mua 1 sản phẩm; nếu mua bộ đồ chơi lego, bác sẽ mua 3 sản phẩm khác nhau; nếu mua bộ lắp ghép robot chạy bằng năng lượng mặt trời, bác sẽ mua 5 sản phẩm khác nhau; nếu mua rubik, bác sẽ mua 7 sản phẩm khác nhau; còn nếu mua mô hình khủng long, bác sẽ mua 9 sản phẩm khác nhau. Bác Thành có bao nhiêu cách chọn quà sinh nhật cho con?

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

Bài 14: Giả sử tính trạng ở một loài cây được quy định do tác động cộng gộp của n cặp alen phân li độc lập $A_1a_1, A_2a_2, \ldots, A_na_n$. Cho cây F_1 dị hợp về n cặp alen giao phối với nhau. Tỉ lệ phân li kiểu hình của F_2 là hệ số của khai triển nhị thức Newton $(a+b)^{2n}$, nghĩa là tỉ lệ phân li kiểu hình của F_2 là $\mathrm{C}_{2n}^0 : \mathrm{C}_{2n}^1 : \mathrm{C}_{2n}^2 : \ \ldots : \mathrm{C}_{2n}^{2n-2} : \mathrm{C}_{2n}^{2n-1} : \mathrm{C}_{2n}^{2n}$. Cho biết một loài cây có tính trạng được quy định bởi tác động cộng gộp của 4 cặp alen phân li độc lập. Tìm tỉ lệ phân li kiểu hình của F_2 nếu cây F_1 dị hợp về 4 cặp alen giao phối với nhau.

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

Bài 6. BÀI TẬP CUỐI CHUYÊN ĐỀ 2 CTST

Bài 1: Chứng minh rằng các đẳng thức sau đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$:

a) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$

b) $1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 10 + \cdots + n(3n+1) = n(n+1)^2$

c) $\dfrac{1}{1 \cdot 3} + \dfrac{1}{3 \cdot 5} + \dfrac{1}{5 \cdot 7} + \cdots + \dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \dfrac{n}{2n+1}$.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Bài 2: Chứng minh rằng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$:

a) $3^n - 1 - 2n$ chia hết cho 4;

b) $7^n - 4^n - 3^n$ chia hết cho 12 .

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Bài 3: Chứng minh rằng $8^n \geq n^3$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Bài 4: Chứng minh rằng bất đẳng thức $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \leq \frac{n+1}{2}$ đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Bài 5: Tìm hệ số của x^3 trong khai triển:

a) $\left(1+\dfrac{x}{2}\right)^7$ **b)** $(1-3x)^8$

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Bài 6: Tìm hệ số của x^5 trong khai triển $(2x+3)(x-2)^6$.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Bài 7:

a) Tìm ba số hạng đầu tiên trong khai triển của $(1+2x)^6$, các số hạng được viết theo thứ tự số mũ của x tăng dần.

b) Sử dụng kết quả trên, hãy tính giá trị gần đúng của $1,02^6$.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Bài 8: Trong khai triển biểu thức $(3x-4)^{15}$ thành đa thức, hãy tính tổng các hệ số của đa thức nhận được.

....
....
....
....
....
....
....
....

....
....

Bài 9: Chứng minh rằng các đẳng thức sau đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$:

a) $1 + 2\mathrm{C}_n^1 + 4\mathrm{C}_n^2 + \cdots + 2^{n-1}\mathrm{C}_n^{n-1} + 2^n\mathrm{C}_n^n = 3^n$,

b) $\mathrm{C}_{2n}^0 + \mathrm{C}_{2n}^2 + \mathrm{C}_{2n}^4 + \cdots + \mathrm{C}_{2n}^{2n} = \mathrm{C}_{2n}^1 + \mathrm{C}_{2n}^3 + \mathrm{C}_{2n}^5 + \cdots + \mathrm{C}_{2n}^{2n-1}$.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Bài 7. BÀI TẬP CUỐI CHUYÊN ĐỀ 2 KNTT

Bài 10: Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n \geq 1$, ta có

$$2 \cdot 2^1 + 3 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2^3 + \ldots + (n+1) \cdot 2^n = n \cdot 2^{n+1}$$

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Bài 11: Đặt $S_n = \dfrac{1}{1.3} + \dfrac{1}{3.5} + \cdots + \dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}$.

a) Tính S_1, S_2, S_3.

b) Dự đoán công thức tính tổng S_n và chứng minh nó bằng quy nạp.

....
....
....
....
....
....
....

Bài 12: Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n, ta có $10^{2n+1}+1$ chia hết cho 11.

Bài 13: Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n \geq 2$, ta có

$$5^n \geq 3^n + 4^n.$$

Bài 14:

a) Khai triển $(1+x)^{10}$.

b) So sánh $(1,1)^{10}$ và 2 .

Bài 15: ìm hệ số của x^9 trong khai triển thành đa thức của

$$(2x-3)^{11}.$$

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Bài 16: Khai triển đa thức $(1+2x)^{12}$ thành dạng

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{12}x^{12}.$$

Tìm hệ số a_k lớn nhất.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Bài 17: Chứng minh rằng

$$\mathrm{C}_{2n}^0 + \mathrm{C}_{2n}^2 + \mathrm{C}_{2n}^4 + \cdots + \mathrm{C}_{2n}^{2n} = \mathrm{C}_{2n}^1 + \mathrm{C}_{2n}^3 + \mathrm{C}_{2n}^5 + \cdots + \mathrm{C}_{2n}^{2n-1}.$$

Áp dụng: Tìm số nguyên dương n thoả mãn

$$\mathrm{C}_{2n}^1 + \mathrm{C}_{2n}^3 + \cdots + \mathrm{C}_{2n}^{2n-1} = 2048$$

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Bài 18: Tìm giá trị lớn nhất trong các giá trị

$$\mathrm{C}_n^0, \mathrm{C}_n^1, \ldots, \mathrm{C}_n^n$$

Áp dụng: Tìm hệ số lớn nhất của khai triển $(a+b)^n$, biết rằng tổng các hệ số của khai triển bằng 4096.

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

Chương **3**

BA ĐƯỜNG CONIC VÀ ỨNG DỤNG

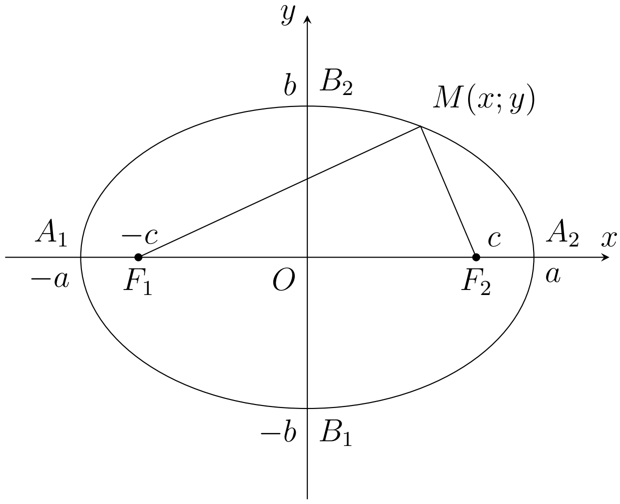
Bài 1. ELIP

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1 Định nghĩa

Cho hai điểm cố định F_1, F_2 và một độ dài không đổi $2a$ lớn hơn F_1F_2. **Elip** (E) là tập hợp các điểm M trong mặt phẳng sao cho $F_1M + F_2M = 2a$.

- Các điểm F_1 và F_2 gọi là các **tiêu điểm** của elip.
- Độ dài $F_1F_2 = 2c$ gọi là **tiêu cự** của elip $(a > c)$.
- (E) cắt Ox tại hai điểm $A_1(-a;0)$, $A_2(a;0)$ và cắt Oy tại hai điểm $B_1(0;-b)$, $B_2(0;b)$.
- Các điểm A_1, A_2, B_1, B_2 gọi là các **đỉnh** của elip.
- Đoạn thẳng A_1A_2 gọi là **trục lớn**, đoạn thẳng B_1B_2 gọi là **trục nhỏ** của elip.



- Giao điểm O của hai trục gọi là **tâm đối xứng** của elip.
- Hình chữ nhật có các cạnh đi qua các đỉnh của elip và song song với các trục đối xứng được gọi là **hình chữ nhật cơ sở** của elip.
- Nếu $M(x;y) \in (E)$ thì $|x| \leq a$, $|y| \leq b$.

2 Phương trình chính tắc của elip

Ta có $M(x;y) \in (E) \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \quad (1)$, trong đó $b = \sqrt{a^2 - c^2}$. Phương trình (1) được gọi là **phương trình chính tắc của elip**.

Ví dụ 1: Cho elip $(E)\colon \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ $(0 < b < a)$ có bốn đỉnh là $A_1(-a;0)$, $A_2(a;0)$, $B_1(0;-b)$, $B_2(0;b)$.

a) Xác định toạ độ bốn đỉnh của hình chữ nhật cơ sở của (E).

b) Cho một điểm $M(x;y)$ bất kì trên (E). Chứng minh rằng

$$b \leq OM \leq a;\ -a \leq x \leq a;\ -b \leq y \leq b.$$

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

> ! Mọi điểm thuộc elip đều nằm bên trong hình chữ nhật cơ sở.

Rèn luyện 1: Viết phương trình chính tắc của elip có kích thước của hình chữ nhật cơ sở là 8 và 6. Hãy xác định toạ độ đỉnh, tiêu điểm, tiêu cự, độ dài trục của elip này.

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

3 Bán kính qua tiêu

Cho điểm M trên elip (E). Các đoạn thẳng MF_1 và MF_2 được gọi là hai bán kính qua tiêu của điểm M.

Độ dài hai bán kính qua tiêu của điểm $M(x;y)$ trên elip $(E)\colon \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ được tính theo công thức: $MF_1=a+\dfrac{c}{a}x$; $MF_2=a-\dfrac{c}{a}x$.

> ! Vì $-a\le x\le a$ nên $a+\dfrac{c}{a}x>0$ và $a-\dfrac{c}{a}x>0$.

Ví dụ 2: Tính độ dài hai bán kính qua tiêu của điểm $M(x;y)$ trên elip $(E)\colon \dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$.

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

Rèn luyện 2:

a) Tính độ dài hai bán kính qua tiêu của điểm $M(x;y)$ trên elip $(E)\colon \dfrac{x^2}{64}+\dfrac{y^2}{36}=1$.

b) Tìm các điểm trên elip $(E)\colon \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ có độ dài hai bán kính qua tiêu bằng nhau.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

4 Tâm sai

Tỉ số giữa tiêu cự và độ dài trục lớn của elip gọi là tâm sai của elip và được kí hiệu là e, tức là $e=\dfrac{c}{a}$.
Với mọi elip, ta luôn có $0<e<1$.

Nhận xét. Ta có $\dfrac{b}{a}=\dfrac{\sqrt{a^2-c^2}}{a}=\sqrt{1-e^2}$, do đó

- Khi tâm sai e càng bé (tức là càng gần 0) thì b càng gần a và elip trông càng "béo".
- Khi tâm sai e càng lớn (tức là càng gần 1) thì tỉ số $\dfrac{b}{a}$ càng gần 0 và elip trông càng "dẹt".

Ví dụ 3:

a) Tìm tâm sai của elip $(E)\colon \dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$ và elip $(E')\colon \dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{24}=1$.

b) Không cần vẽ hình, theo bạn elip nào "béo" hơn?

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Rèn luyện 3:

a) Tìm tâm sai của elip $(E)\colon \dfrac{x^2}{100}+\dfrac{y^2}{99}=1$ và elip $(E')\colon \dfrac{x^2}{10}+\dfrac{y^2}{1}=1$.

b) Không cần vẽ hình, theo bạn elip nào có hình dạng "dẹt" hơn?

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

5 Đường chuẩn

Đường thẳng $\Delta_1 : x + \dfrac{a}{e} = 0$ được gọi là đường chuẩn ứng với tiêu điểm F_1 và đường thẳng $\Delta_2 : x - \dfrac{a}{e} = 0$ được gọi là đường chuẩn ứng với tiêu điểm F_2 của elip (E).
Với mọi điểm M thuộc elip, ta luôn có $\dfrac{MF_1}{d\,(M;\Delta_1)} = \dfrac{MF_2}{d\,(M;\Delta_2)} = e$.

! Vì $-\dfrac{a}{e} < -a < a < \dfrac{a}{e}$ nên đường chuẩn của elip không có điểm chung với elip đó.

Ví dụ 4: Cho điểm $M(x;y)$ trên elip (E): $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$.

a) Tìm toạ độ hai tiêu điểm và viết phương trình hai đường chuẩn tương ứng.

b) Tính tỉ số khoảng cách từ M đến tiêu điểm và đến đường chuẩn tương ứng.

c) Vẽ elip (E), hình chữ nhật cơ sở và hai đường chuẩn của (E) trên hệ trục toạ độ Oxy.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Rèn luyện 4: Tìm toạ độ hai tiêu điểm và viết phương trình hai đường chuẩn tương ứng của các elip sau

a) $(E_1) : \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{1} = 1$.

b) $(E_2) : \dfrac{x^2}{100} + \dfrac{y^2}{36} = 1$.

....
....
....
....
....
....
....

. . . .
. . . .
. . . .

B BÀI TẬP

Bài 1: Cho elip $(E)\colon \dfrac{x^2}{64}+\dfrac{y^2}{36}=1$.

a) Tìm tâm sai, chiều dài, chiều rộng hình chữ nhật cơ sở của (E) và vẽ (E).

b) Tìm độ dài hai bán kính qua tiêu của điểm $M(0;6)$ trên (E).

c) Tìm tọa độ hai tiêu điểm và viết phương trình hai đường chuẩn của (E).

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

Bài 2: Tìm các điểm trên elip $(E)\colon \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ có độ dài hai bán kính qua tiêu nhỏ nhất, lớn nhất.

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

Bài 3: Lập phương trình chính tắc của elip có tiêu cự bằng 12 và khoảng cách giữa hai đường chuẩn là $\dfrac{169}{6}$.

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

Bài 4: Cho elip $(E)\colon \dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{1}=1$.

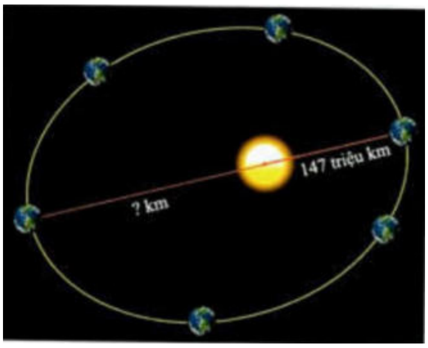
a) Tìm tâm sai và độ dài hai bán kính qua tiêu của điểm $M(3;0)$ trên (E).

b) Tìm điểm N trên (E) sao cho $NF_1 = NF_2$.

c) Tìm điểm S trên (E) sao cho $SF_1 = 2SF_2$.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Bài 5: Trái Đất chuyển động theo một quỹ đạo là đường elip có tâm sai là 0,0167 và nhận tâm Mặt Trời là một tiêu điểm. Cho biết khoảng cách gần nhất giữa Trái Đất và tâm Mặt Trời là khoảng 147 triệu km, tính khoảng cách xa nhất giữa Trái Đất và tâm Mặt Trời.



....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Bài 6: Ngày 04/10/1957, Liên Xô đã phóng thành công vệ tinh nhân tạo đầu tiên vào không gian, vệ tinh mang tên Sputnik I. Vệ tinh đó có quỹ đạo hình elip (E) nhận tâm Trái Đất là một tiêu điểm. Cho biết khoảng cách xa nhất giữa vệ tinh và tâm Trái Đất là 7310 km và khoảng cách gần nhất giữa vệ tinh và tâm Trái Đất là 6586 km. Tìm tâm sai của quỹ đạo chuyển động của vệ tinh Sputnik I.

....
....
....

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

C BÀI TẬP

Giải các bài tập sách CTST

D LUYỆN TẬP 1

Giải các bài tập sách KNTT

Bài 1: Cho elip $\dfrac{x^2}{12} + \dfrac{y^2}{4} = 1$.

a) Xác định các đỉnh và độ dài các trục của elip.

b) Xác định tâm sai và các đường chuẩn của elip.

c) Tính các bán kính qua tiêu của điểm M thuộc elip, biết điểm M có hoành độ bằng -3.

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

Bài 2: Viết phương trình chính tắc của elip trong mỗi trường hợp sau

a) Độ dài trục lớn bằng 8, tiêu cự bằng 6;

b) Độ dài trục lớn bằng 8 và tâm sai bằng $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

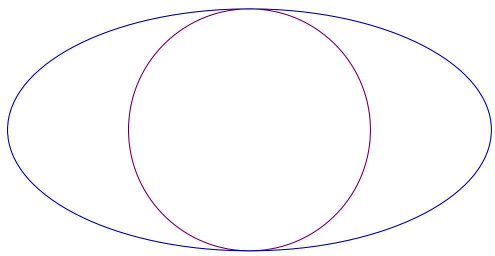
. . . .

Bài 3: Cho elip $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{5} = 1$.

a) Qua tiêu điểm của elip vẽ đường thẳng vuông góc với trục Ox, cắt elip tại hai điểm A và B. Tính độ dài đoạn thẳng AB.

b) Tìm điểm M trên elip sao cho $MF_1 = 2MF_2$ với F_1 và F_2 là hai tiêu điểm của elip (hoành độ của F_1 âm).

Bài 4: Đường tròn phụ của hình elip là đường tròn có đường kính là trục nhỏ của elip (Hình 3.8). Do đó, đường tròn phụ là đường tròn lớn nhất có thể nằm bên trong một hình elip. Tìm phương trình đường tròn phụ của elip $(E)\colon \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ và chứng minh rằng, nếu điểm $M\left(x_0; y_0\right)$ thuộc elip thì điểm $N\left(\dfrac{b}{a}x_0; y_0\right)$ thuộc đường tròn phụ này.



Hình 3.8

Bài 5: Với tâm sai khoảng 0,244, quỹ đạo elip của sao Diêm Vương "dẹt" hơn so với quỹ đạo của tám hành tinh trong hệ Mặt Trời (xem Em có biết? ở cuối bài). Nửa độ dài trục lớn của elip quỹ đạo là khoảng $590635 \cdot 10^6$ km. Tìm khoảng cách gần nhất và khoảng cách xa nhất giữa tâm sao Diêm Vương và tâm Mặt Trời (tiêu điểm của quỹ đạo).

Bài 6: Một phòng thì thầm có trần vòm elip với hai tiêu điểm ở độ cao 1,6 m (so với mặt sàn) và cách nhau 16 m. Đỉnh của mái vòm cao 7,6 m (Hình 3.9). Hỏi âm thanh thì thầm từ một tiêu điểm thì sau bao nhiêu giây đến được tiêu điểm kia? Biết vận tốc âm thanh là 343,2 m/s và làm tròn đáp số tới 4 chữ số sau dấu phẩy.

Hình 3.9

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

E LUYỆN TẬP 2

Giải các bài tập sách CD

Bài 1: Viết phương trình chính tắc của elip (E) trong mỗi trường hợp sau

a) Độ dài trục lớn bằng 6 và tiêu điểm là $F_1(-2;0)$;

b) Tiêu cự bằng 12 và tâm sai bằng $\frac{3}{5}$;

c) Tâm sai bằng $\dfrac{\sqrt{5}}{3}$ và chu vi hình chữ nhật cơ sở của (E) bằng 20.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Bài 2: Tìm tâm sai của elip (E) trong mỗi trường hợp sau

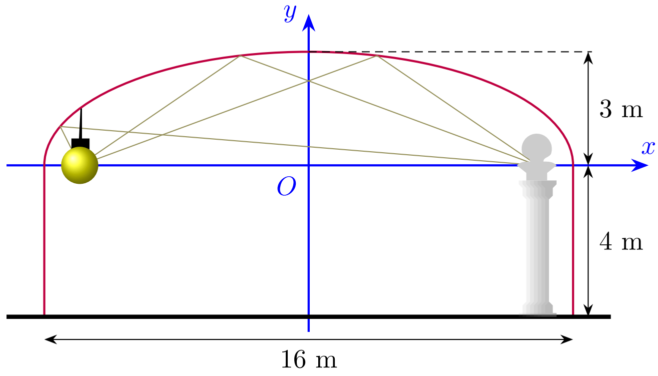
a) Độ dài bán trục lớn gấp hai lần độ dài bán trục bé;

b) Khoảng cách từ một đỉnh trên trục lớn đến một đỉnh trên trục bé bằng tiêu cự.

Bài 3: Trái Đất chuyển động quanh Mặt Trời theo một quỹ đạo là đường elip mà Mặt Trời là một tiêu điểm. Biết elip này có bán trục lớn $a \approx 149.598.261$ km và tâm sai $e \approx 0{,}017$. Tìm khoảng cách nhỏ nhất và lớn nhất giữa tâm Trái Đất và tâm Mặt Trời (kết quả được làm tròn đến hàng đơn vị).

Bài 4: Cho elip $(E)\colon \dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$. Tìm toạ độ điểm $M \in (E)$ sao cho độ dài F_2M lớn nhất, biết F_2 là một tiêu điểm của (E) có hoành độ dương.

Bài 5: Hình 11 minh hoạ mặt cắt đứng của một căn phòng trong bảo tàng với mái vòm trần nhà của căn phòng đó có dạng một nửa đường elip. Chiều rộng của căn phòng là 16 m, chiều cao của tường là 4 m, chiều cao của mái vòm là 3 m.



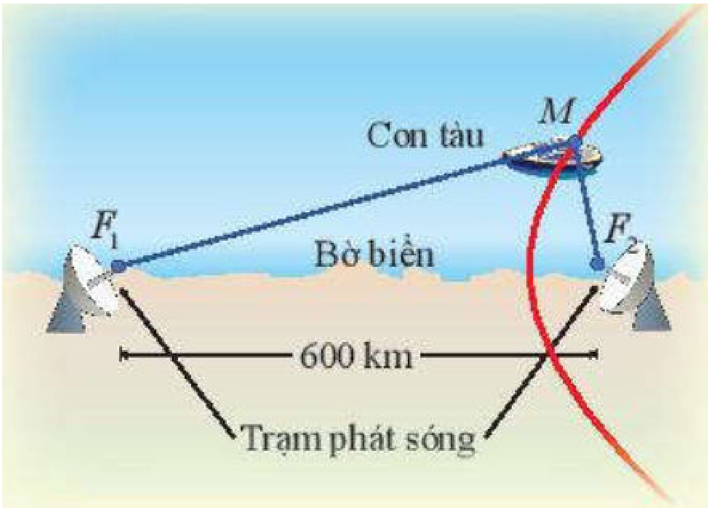
a) Viết phương trình chính tắc của elip biểu diễn mái vòm trần nhà trong hệ trục tọa độ Oxy (đơn vị trên hai trục là mét).

b) Một nguồn sáng được đặt tại tiêu điểm thứ nhất của elip. Cần đặt bức tượng ở vị trí có tọa độ nào để bức tượng sáng rõ nhất? Giả thiết rằng vòm trần phản xạ ánh sáng. Biết rằng, một tia sáng xuất phát từ một tiêu điểm của elip, sau khi phản xạ tại elip thì sẽ đi qua tiêu điểm còn lại.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Bài 2. Hypebol

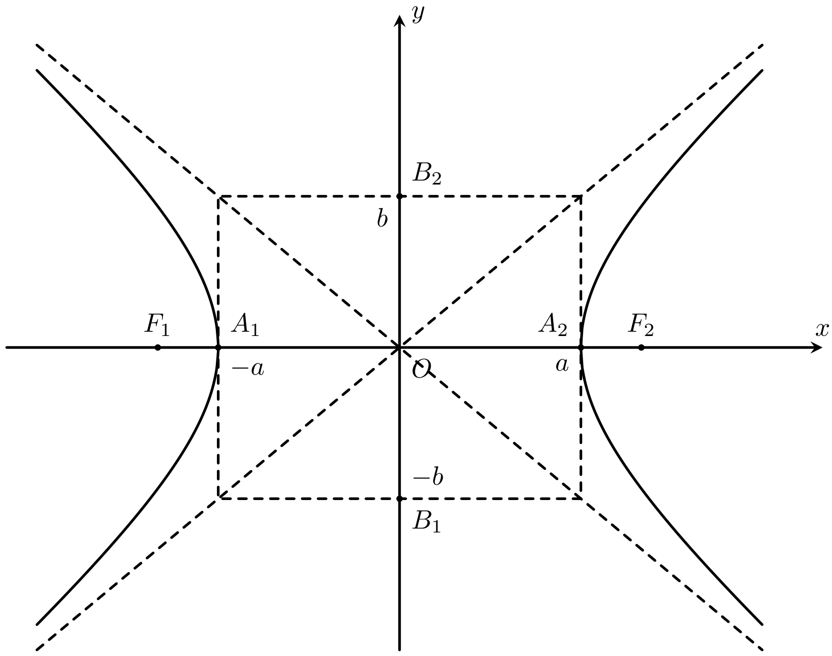
Từ khoá Hypebol; Trục đối xứng; Tâm đối xứng; Bán kính qua tiêu; Tâm sai; Đường chuẩn.
Nhờ việc thu tín hiệu từ hai trạm phát sóng F_1 và F_2 trên bờ, hệ thống định vị đặt tại điểm M trên con tàu tính được hiệu số khoảng cách từ M đến F_1, F_2 và xác định được một đường hypebol đi qua M.



A Tính đối xứng của đường hypebol

Ôn tập về hypebol

Ta đã biết hypebol (H) với phương trình chính tắc $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > 0,\, b > 0)$ có các yếu tố cơ bản sau



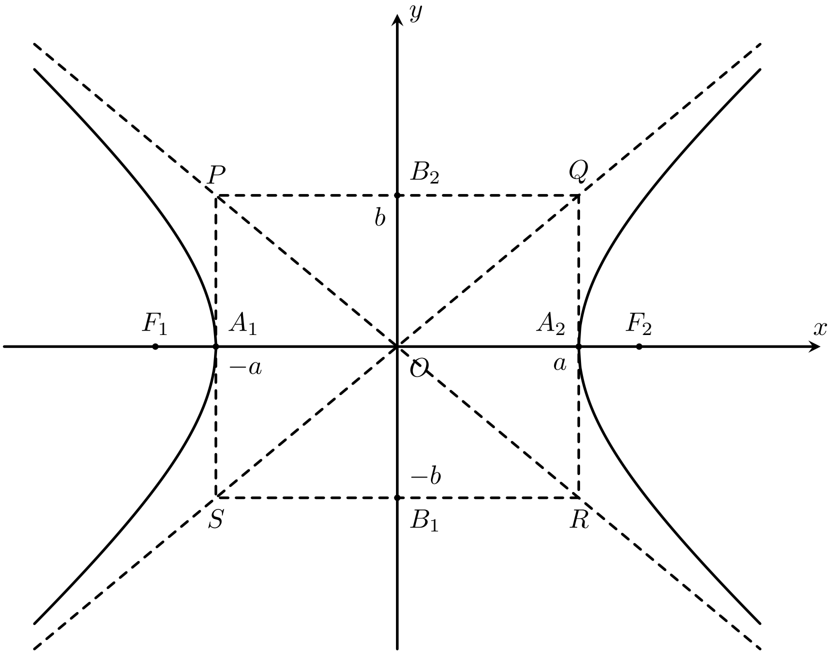
- Cắt trục Ox tại hai đỉnh $A_1(-a; 0)$, $A_2(a; 0)$ nhưng không cắt trục Oy.
- Trục thực là A_1A_2 có độ dài $2a$.
- Trục ảo là B_1B_2 có độ dài $2b$ với $B_1(0; -b)$, $B_2(0; b)$
- Hai tiêu điểm là $F_1(-c; 0), F_2(c; 0)$ với $c = \sqrt{a^2 + b^2}$.
- Tiêu cự $2c$ là khoảng cách giữa hai tiêu điểm.

Chú ý Hypebol gồm hai phần riêng biệt nằm hai bên trục ảo, mỗi phần gọi là một nhánh của hypebol. Nhánh đi qua đỉnh $A_1(-a; 0)$ gồm những điểm $M(x; y)$ với $x \leq -a$ và thoả mãn $MF_2 - MF_1 = 2a$. Nhánh đi qua đỉnh $A_2(a; 0)$ gồm những điểm $M(x; y)$ với $x \geq a$ và thoả mãn $MF_1 - MF_2 = 2a$.

Bài toán. Cho hypebol (H) với phương trình chính tắc $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ và điểm $M\,(x_0; y_0)$ nằm trên (H). Các điểm $M_1\,(-x_0; y_0)\,, M_2\,(x_0; -y_0)\,, M_3\,(-x_0; -y_0)$ có thuộc (H) không?

Lời giải.

Thế tọa độ các điểm M_1, M_2, M_3 vào hypebol ta thấy rằng các điểm này thuộc hypebol ..□



Định nghĩa. Hypebol $(H): \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ nhận hai trục toạ độ làm trục đối xứng và nhận gốc tọa độ làm tâm đối xứng. Hình chữ nhật có hai cạnh lần lượt đi qua hai đỉnh A_1, A_2 và song song với trục Oy, hai cạnh còn lại đi qua B_1, B_2 và song song với trục Ox được gọi là hình chữ nhật cơ sở của hypebol (H).

Nhận xét Khi càng tiến xa gốc toạ độ, hai nhánh của hypebol (H) càng tiến gần đến hai đường thẳng chứa hai đường chéo của hình chữ nhật cơ sở (nhưng không có điểm chung). Hai đường thẳng này có phương trình $y = \dfrac{b}{a}x, y = -\dfrac{b}{a}x$ và được gọi là hai đường tiệm cận của hypebol (H).

Ví dụ 1: Cho hypebol (H) có hai đỉnh là $A_1(-a;0)$, $A_2(a;0)$ và trục ảo là B_1B_2 với $B_1(0;-b)$, $B_2(0;b)$.

a) Xác định toạ độ bốn đỉnh của hình chữ nhật cơ sở của (H).

b) Cho một điểm M bất kì trên (H). Chứng minh rằng $a \leq OM$.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Chú ý Mọi điểm thuộc hypebol (ngoại trừ hai đỉnh) đều nằm ngoài hình chữ nhật cơ sở.

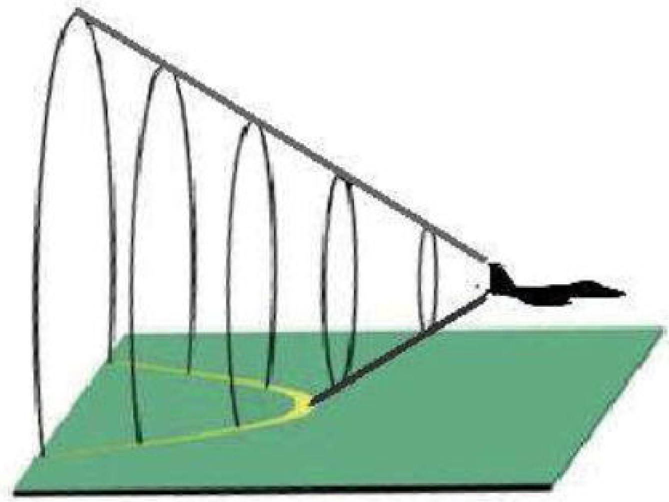
Ví dụ 2: Viết phương trình chính tắc của hypebol có kích thước của hình chữ nhật cơ sở là 8 và 6. Xác định đỉnh, tiêu điểm, tiêu cự, độ dài trục của hypebol này.

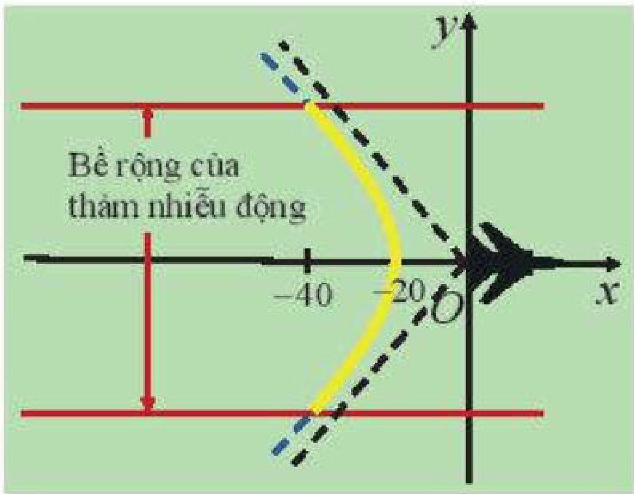
....
....
....

....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 3: Khi bay với vận tốc siêu thanh (tốc độ chuyển động lớn hơn tốc độ âm thanh trong cùng môi trường), một máy bay tạo ra một vùng nhiễu động trên mặt đất dọc theo một nhánh của hypebol (H). Phần nghe rõ nhất tiếng ồn của vùng nói trên được gọi là thảm nhiễu động. Bề rộng của thảm này gấp khoảng 5 lần cao độ của máy bay. Tính cao độ của máy bay, biết bề rộng của thảm nhiễu động được đo cách phía sau máy bay một khoảng là 40 mile (mile (dặm) là đơn vị đo khoảng cách, 1 mile $\approx 1,6$km) và (H) có phương trình:

$$\frac{x^2}{400} - \frac{y^2}{100} = 1$$





....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

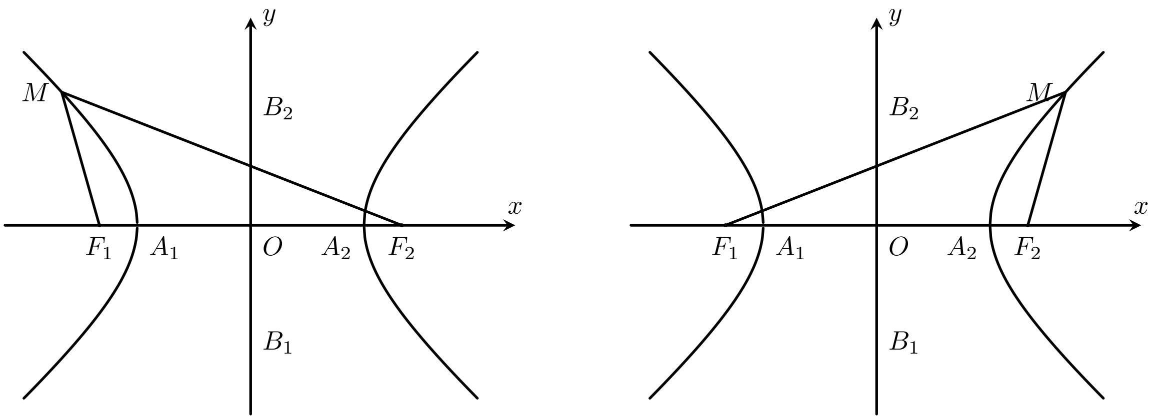
B Bán kính qua tiêu

Bài toán. Cho điểm $M(x;y)$ nằm trên hypebol $(H) : \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

a) Chứng minh rằng $F_1M^2 - F_2M^2 = 4cx$.

b) Giả sử điểm $M(x;y)$ thuộc nhánh đi qua $A_1(-a;0)$. Sử dụng kết quả đã chứng minh được ở câu a) kết hợp với tính chất $MF_2 - MF_1 = 2a$ đã biết để chứng minh $MF_2 + MF_1 = -2\dfrac{cx}{a}$.
Từ đó, chứng minh các công thức $MF_1 = -a - \dfrac{c}{a}x$; $MF_2 = a - \dfrac{c}{a}x$

c) Giả sử điểm $M(x;y)$ thuộc nhánh đi qua $A_2(a;0)$. Sử dụng kết quả đã chứng minh được ở câu a) kết hợp với tính chất $MF_1 - MF_2 = 2a$ đã biết để chứng minh $MF_2 + MF_1 = 2\dfrac{cx}{a}$.
Từ đó, chứng minh các công thức $MF_1 = a + \dfrac{c}{a}x$; $MF_2 = -a + \dfrac{c}{a}x$



Hình a) Hình b)

Định nghĩa. Cho điểm M thuộc hypebol (H). Các đoạn thẳng MF_1 và MF_2 được gọi là hai bán kính qua tiêu của điểm M.
Độ dài hai bán kính qua tiêu của điểm $M(x;y)$ trên hypebol (H): $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ được tính theo công thức $MF_1 = \left|a + \dfrac{c}{a}x\right|$; $MF_2 = \left|a - \dfrac{c}{a}x\right|$.

Ví dụ 1: Tính độ dài hai bán kính qua tiêu của $M(x;y)$ trên hypebol $(H): \dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{9} = 1$.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 2: Tính độ dài hai bán kính qua tiêu của điểm $M(x;y)$ trên hypebol $(H): \dfrac{x^2}{64} - \dfrac{y^2}{36} = 1$.

....
....
....
....
....
....

....
....
....
....

Ví dụ 3: Tính độ dài hai bán kinh qua tiêu của đỉnh $A_2(a;0)$ trên hypebol $(H): \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

C Tâm sai

Bài toán. Cho hypebol $(H): \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. Chứng tỏ rằng $\dfrac{c}{a} > 1$.

Định nghĩa. Tỉ số giữa tiêu cự và độ dài trục thực là tâm sai của hypebol và được kí hiệu là e, nghĩa là $e = \dfrac{c}{a}$. Với mọi hypebol, ta luôn có $e > 1$.

Ví dụ 1: Tìm tâm sai của hypebol $(H): \dfrac{x^2}{64} - \dfrac{y^2}{36} = 1$.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 2: Tìm tâm sai của các hypebol sau

a) (H_1): $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{1} = 1$.

b) (H_2): $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{25} = 1$.

c) (H_3): $\dfrac{x^2}{3} - \dfrac{y^2}{3} = 1$.

....
....
....
....
....

....
....
....
....
....

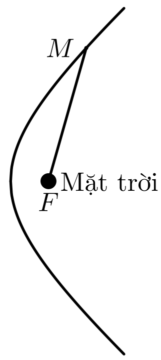
Ví dụ 3: Cho hypebol (H) có tâm sai bằng $\sqrt{2}$. Chứng minh trục thực và trục ảo của (H) có độ dài bằng nhau.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 4: Một vật thể có quỹ đạo là một nhánh của hypebol (H), nhận tâm Mặt Trời làm tiêu điểm. Cho biết tâm sai của (H) bằng $1,2$ và khoảng cách gần nhất giữa vật thể và tâm Mặt Trời là 2.10^8km.

a) Lập phương trình chính tắc của (H).

b) Lập công thức tính bán kính qua tiêu của vị trí $M(x;y)$ của vật thể trong mặt phẳng toạ độ.



....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

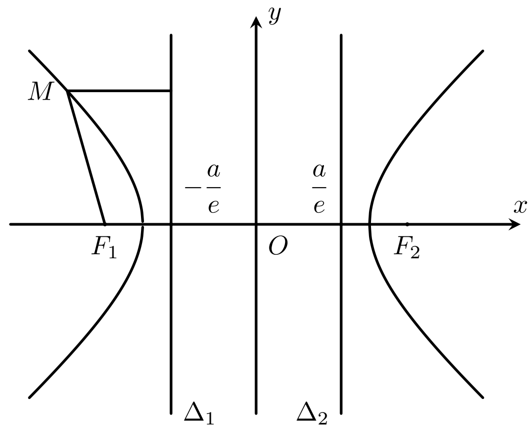
D Đường chuẩn

Bài toán. Cho điểm $M(x;y)$ trên hypebol $(H):\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ và hai đường thẳng $\Delta_1: x+\dfrac{a}{e}=0$; $\Delta_2: x-\dfrac{a}{e}=0$.

Gọi $d\left(M;\Delta_1\right)$, $d\left(M;\Delta_2\right)$ lần lượt là khoảng cách từ M đến các đường thẳng Δ_1, Δ_2.

Ta có: $\dfrac{MF_1}{d(M;\Delta_1)} = \dfrac{|a+ex|}{\left|x+\dfrac{a}{e}\right|} = \dfrac{|a+ex|}{\dfrac{|a+ex|}{e}} = e.$

Dựa theo cách tính trên, tính $\dfrac{MF_2}{d(M;\Delta_2)}$.



Định nghĩa. Cho hypebol (H) có phương trình chính tắc $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ và có hai tiêu điểm $F_1(-c;0), F_2(c;0)$.
Đường thẳng $\Delta_1 : x + \dfrac{a}{e} = 0$ được gọi là đường chuẩn ứng với tiêu điểm F_1 và đường thẳng $\Delta_2 : x - \dfrac{a}{e} = 0$ được gọi là đường chuẩn ứng với tiêu điểm F_2 của hypebol (H).

Với mọi điểm M thuộc hypebol, ta luôn có $\dfrac{MF_1}{d(M;\Delta_1)} = \dfrac{MF_2}{d(M;\Delta_2)} = e$.

Chú ý: Vì $-a < -\dfrac{a}{e} < \dfrac{a}{e} < a$ nên đường chuẩn của hypebol không có điểm chung với hypebol đó.

Ví dụ 1: Cho điểm $M(x;y)$ trên hypebol $(H) : \dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{9} = 1$.

a) Tìm toạ độ hai tiêu điểm và viết phương trình hai đường chuẩn tương ứng.

b) Tính tỉ số khoảng cách từ M đến tiêu điểm và đến đường chuẩn tương ứng.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 2: Tìm toạ độ hai tiêu điểm và viết phương trình hai đường chuẩn tương ứng của các hypebol sau

a) $(H_1) : \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{1} = 1$.

b) $(H_2) : \dfrac{x^2}{36} - \dfrac{y^2}{64} = 1$.

c) $(H_3) : \dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{9} = 1$.

....
....
....
....
....
....

Ví dụ 3: Lập phương trình chính tắc của hypebol có tiêu cự bằng 26 và khoảng cách giữa hai đường chuẩn bằng $\dfrac{288}{13}$.

E BÀI TẬP

Bài 1: Cho hypebol $(H): \dfrac{x^2}{144} - \dfrac{y^2}{25} = 1$.

a) Tìm tâm sai và độ dài hai bán kính qua tiêu của điểm $M\left(13; \dfrac{25}{12}\right)$ trên (H).

b) Tìm tọa độ hai tiêu điểm và viết phương trình hai đường chuẩn tương ứng.

c) Tìm điểm $N(x; y) \in (H)$ sao cho $NF_1 = 2NF_2$ với F_1, F_2 là hai tiêu điểm của (H).

Bài 2: Lập phương trình chính tắc của hypebol có tiêu cự bằng 20 và khoảng cách giữa hai đường chuẩn bằng $\dfrac{36}{5}$.

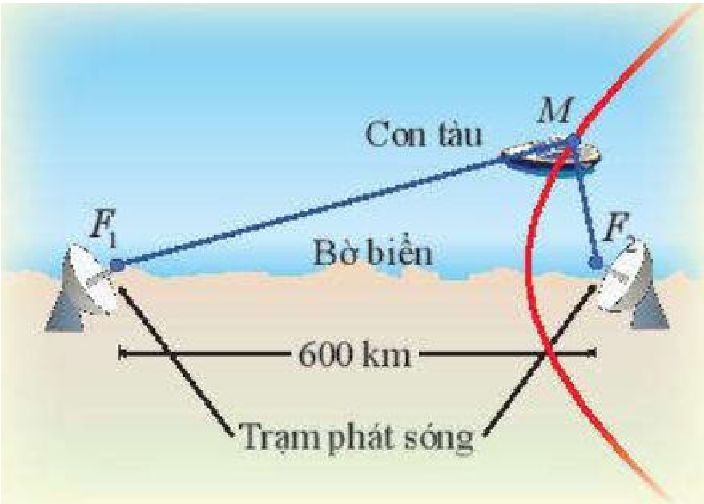
Bài 3: Cho đường tròn (C) tâm F_1, bán kính r và một điểm F_2 thoả mãn $F_1F_2 = 4r$.

a) Chứng tỏ rằng tâm của các đường tròn đi qua F_2 và tiếp xúc với (C) nằm trên một đường hypebol (H).

b) Viết phương trình chính tắc và tìm tâm sai của (H).

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

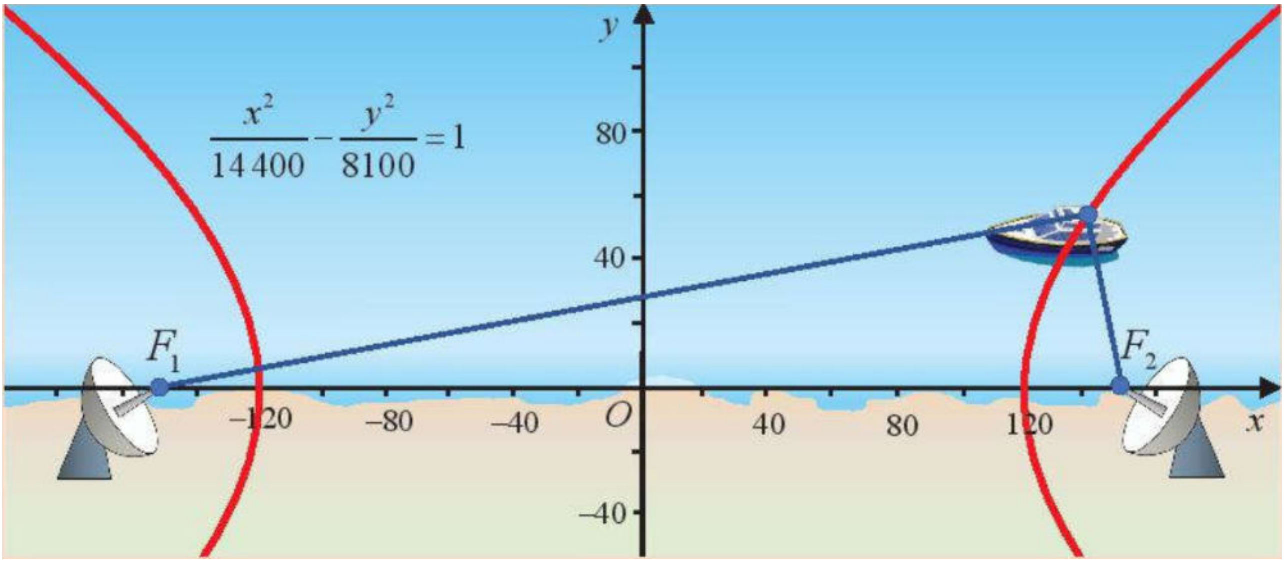
Bài 4: Trong hoạt động mở đầu bài học, cho biết khoảng cách giữa hai trạm vô tuyến là 600km, vận tốc sóng vô tuyến là 300000km/s và thời gian con tàu nhận được tín hiệu từ hai trạm trên bờ biển luôn cách nhau $0,0012$s (hai trạm vô tuyến phát các tín hiệu cùng một thời điểm). Viết phương trình chính tắc của quỹ đạo hypebol (H) của con tàu.



....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

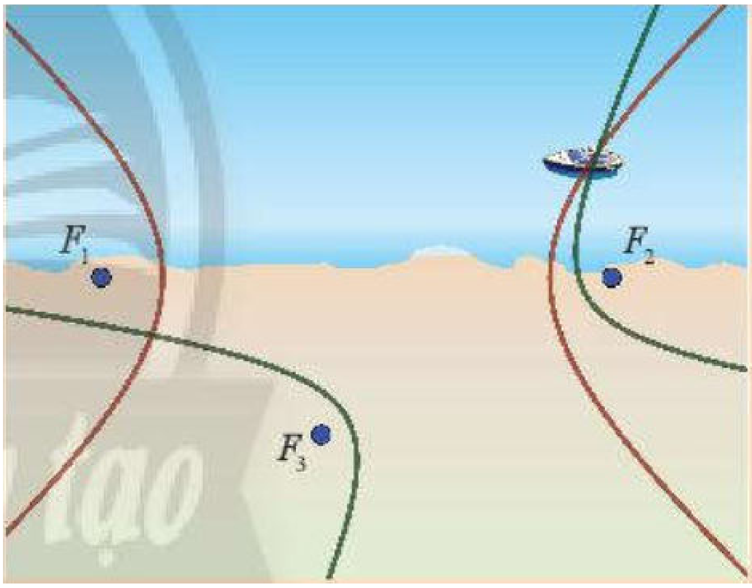
F Bạn có biết?

Hệ thống định vị LORAN



Người ta đã ứng dụng tính chất của các đường hypebol để định vị tàu thuyền ven biển thông qua hệ thống LORAN.

Cách vận hành của một LORAN như sau:
Khi hai trạm phát F_1 và F_2 phát tín hiệu cùng một thời điểm đến con tàu, thì hiệu số giữa hai thời điểm con tàu nhận được tín hiệu từ hai trạm nhân với tốc độ của sóng vô tuyến sẽ cho hiệu số khoảng cách từ vị trí của tàu đến F_1 và F_2. Do đó, con tàu đang ở đâu đó trên một hypebol có tiêu điểm là F_1 và F_2. Bằng cách đưa vào trạm phát sóng thứ ba, F_3, chúng ta có thể hình thành một nhánh hypebol khác với các tiêu điểm là F_2 và F_3. Khi đó vị trí của con tàu là giao điểm của hai nhánh hypebol nêu trên.

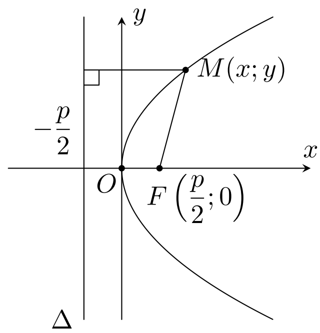


Nguyên tắc dựa trên các hypebol giao nhau này được sử dụng trong hệ thống định vị tầm xa, được gọi là LORAN (LOng RAnge Navigation). Các trạm radar đóng vai trò là tiêu điểm của các hypebol, và tất nhiên, máy tính được sử dụng cho nhiều thao tác cần thiết để xác định vị trí của con tàu. (Nguồn: https://en.wikipedia.org/wiki/LORAN)

Bài 3. Parabol

A Tính đối xứng của đường parabol

Ta đã biết parabol (P) với phương trình chính tắc $y^2 = 2px$ có tiêu điểm $F\left(\frac{p}{2};0\right)$ và có đường chuẩn Δ: $x = -\frac{p}{2}$. Parabol (P) nhận Ox làm trục đối xứng.
Giao điểm của parabol (P) và trục đối xứng của nó gọi là đỉnh của parabol.



!

- Với mọi điểm $M(x;y)$ thuộc parabol $(P): y^2 = 2px$ (với $p > 0$) ta đều có $x \geq 0$, suy ra (P) thuộc nửa mặt phẳng toạ độ có $x \geq 0$.
- Vì $-\frac{p}{2} < 0$ nên đường chuẩn của parabol không có điểm chung với parabol đó.

Khoảng cách từ tiêu điểm đến đường chuẩn gọi là **tham số tiêu** của parabol.

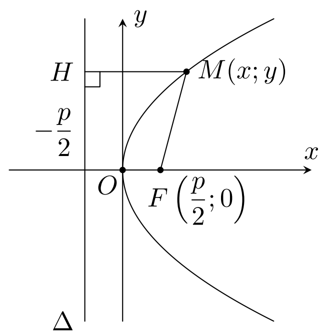
! Khác với elip và hypebol, đường parabol chỉ có một trục đối xứng, một đỉnh và không có tâm đối xứng.

Ví dụ 1: Tìm toạ độ tiêu điểm, toạ độ đỉnh, phương trình đường chuẩn và trục đối xứng của parabol $(P): y^2 = 4x$.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

1 Bán kính qua tiêu và tâm sai của parabol

Cho điểm M trên parabol (P) có tiêu điểm F và đường chuẩn Δ. Ta gọi đoạn FM là bán kính qua tiêu của điểm M và gọi tỉ số $e = \frac{FM}{\mathrm{d}(M,\Delta)}$ là tâm sai của parabol (P).
Mọi parabol đều có tâm sai $e = 1$ và parabol chính tắc (P): $y^2 = 2px$ có độ dài bán kính qua tiêu của điểm $M(x;y)$ là $FM = x + \frac{p}{2}$.



Ví dụ 2: Tính bán kính qua tiêu của điểm $M(1;2)$ trên parabol (P): $y^2 = 4x$.

....
....
....
....
....

....
....
....
....
....

B BÀI TẬP

Bài 1: Tìm toạ độ tiêu điểm và phương trình đường chuẩn của các parabol sau.

a) $(P_1): y^2 = 7x$; **b)** $(P_2): y^2 = \dfrac{1}{3}x$; **c)** $(P_3): y^2 = \sqrt{2}x$.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Bài 2: Tính bán kính qua tiêu của điểm đã cho trên các parabol sau.

a) Điểm $M_1(3; -6)$ trên $(P_1): y^2 = 12x$;

b) Điểm $M_2(6; 1)$ trên $(P_2): y^2 = \dfrac{1}{6}x$;

c) Điểm $M_3(\sqrt{3}; \sqrt{3})$ trên $(P_3): y^2 = \sqrt{3}x$.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Bài 3: Trong mặt phẳng Oxy, cho điểm $A\left(\dfrac{1}{4}; 0\right)$ và đường thẳng $d\colon x + \dfrac{1}{4} = 0$. Viết phương trình của đường (P) là tập hợp tâm $M(x; y)$ của các đường tròn (C) di động nhưng luôn luôn đi qua A và tiếp xúc với d.

....
....
....
....
....
....

....
....
....
....

Bài 4: Cho parabol (P). Trên (P) lấy hai điểm M, N sao cho đoạn thẳng MN đi qua tiêu điểm F của (P). Chứng minh rằng khoảng cách từ trung điểm I của đoạn thẳng MN đến đường chuẩn Δ của (P) bằng $\frac{1}{2}MN$ và đường tròn đường kính MN tiếp xúc với Δ.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Bài 5: Hãy so sánh bán kính qua tiêu của điểm M trên parabol (P) với bán kính của đường tròn tâm M, tiếp xúc với đường chuẩn của (P).

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Bài 6: Một sao chổi A chuyển động theo quỹ đạo có dạng một parabol (P) nhận tâm Mặt Trời là tiêu điểm. Cho biết khoảng cách ngắn nhất giữa sao chổi A và tâm Mặt Trời là khoảng 112 km.

a) Viết phương trình chính tắc của parabol (P).

b) Tính khoảng cách giữa sao chổi A và tâm Mặt Trời khi sao chổi nằm trên đường thẳng đi qua tiêu điểm và vuông góc với trục đối xứng của (P).

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Bài 7: Mặt cắt của gương phản chiếu của một đèn pha có dạng một parabol (P) có phương trình chính tắc $y^2 = 6x$. Tính khoảng cách từ điểm $M(1; \sqrt{6})$ trên gương đến tiêu điểm của (P). (với đơn vị trên hệ trục toạ độ là xentimét).

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

C LUYỆN TẬP 1

Bài 1: Cho parabol có phương trình $y^2 = 12x$. Tìm tiêu điểm và đường chuẩn của parabol. Tính bán kính qua tiêu của điểm M thuộc parabol và có hoành độ bằng 5.

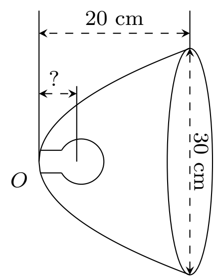
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Bài 2: Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, parabol (P) có phương trình chính tắc và đi qua điểm $M(3; 3\sqrt{2})$. Tìm bán kính qua tiêu và khoảng cách từ tiêu điểm tới đường chuẩn của (P).

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

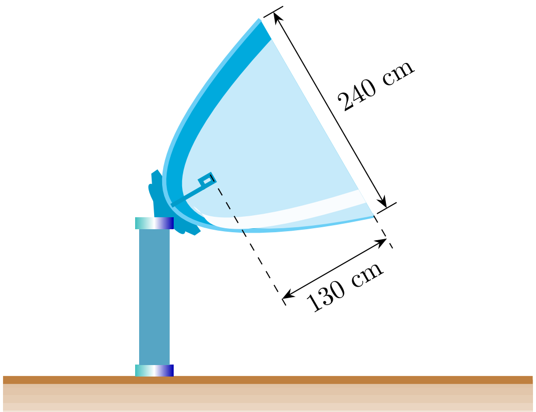
Bài 3:

Xét đèn có bát đáy parabol với kích thước được thể hiện như hình vẽ. Dây tóc bóng đèn được đặt ở vị trí tiêu điểm. Hãy tính khoảng cách từ dây tóc tới đỉnh bát đáy.



....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Bài 4:
Anten vệ tinh parabol có đầu thu đặt tại tiêu điểm, đường kính miệng anten là 240 cm, khoảng cách từ vị trí đặt đầu thu tới miệng anten là 130 cm như hình vẽ. Tính khoảng cách từ vị trí đặt đầu thu tới đỉnh anten.



....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

D LUYỆN TẬP 2

Bài 1: Viết phương trình chính tắc của parabol trong mỗi trường hợp sau:

a) Tiêu điểm là $F_2(5;0)$;

b) Phương trình đường chuẩn là $x=-4$;

c) Parabol đi qua điểm $A(4;9)$.

....
....
....
....
....
....
....
....
....

. . . .

Bài 2: Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho parabol có phương trình chính tắc $y^2 = 8x$.

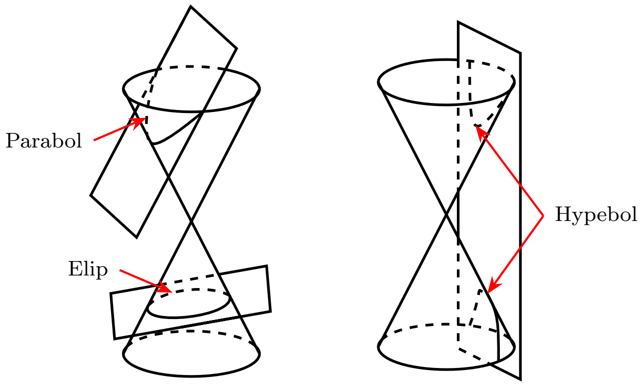
a) Xác định toạ độ tiêu điểm và phương trình đường chuẩn của parabol.

b) Vẽ parabol.

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

Bài 4. TÍNH CHẤT CHUNG CỦA BA ĐƯỜNG CONIC

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT



Tại sao người ta gọi elip, hypebol, parabol là ba đường conic?

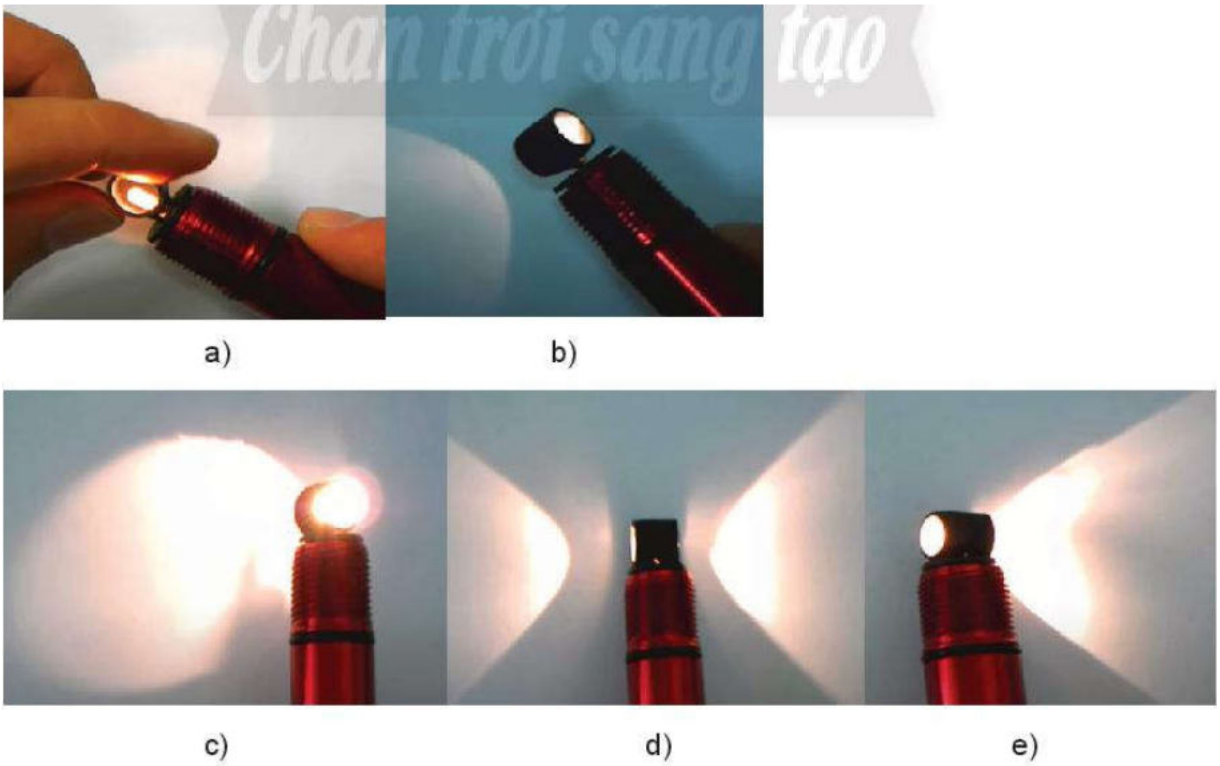
1 Giao của mặt phẳng với mặt nón tròn xoay

Gắn một đoạn ống nhựa vào đầu bóng của một đèn chiếu nhỏ để tạo ra một chùm ánh sáng hình mặt nón tròn xoay (Hình 1a, b). Chiếu đèn lên một bức tường với các góc nghiêng khác nhau để ánh sáng từ đèn hắt lên bức tường tạo thành các bóng khác nhau (Hình 1c, d, e). Nhận xét hình ảnh bạn nhìn thấy trên bức tường.

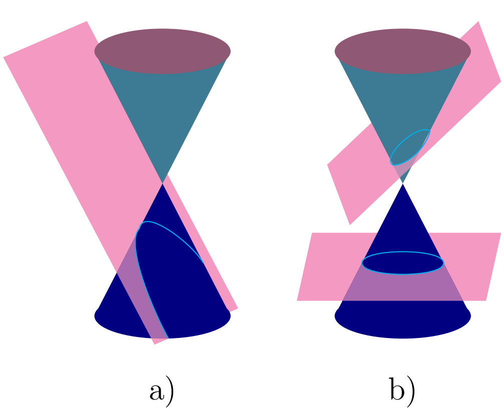
Hình 1

Người ta chứng minh được có thể tạo ra các đường tròn, elip, hypebol, parabol bằng cách cho mặt phẳng cắt mặt nón tròn xoay.

Định nghĩa. Giao của một mặt phẳng với một mặt nón tròn xoay (mặt phẳng không đi qua đỉnh của mặt nón) có thể là đường tròn, đường elip, đường hypebol hay đường parabol.



Ví dụ 1: Trong Hình 2a, giao của mặt phẳng và mặt nón là một đường parabol.



Hình 2

Rèn luyện 1: Giao của mặt phẳng và mặt nón trong Hình 2b, c có dạng đường gì?

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

Rèn luyện 2: Khi máy bay bay song song với mặt đất với vận tốc lớn hơn vận tốc của âm thanh sẽ tạo ra các lớp không khí dao động có hình mặt nón (nón Mach) (Hình 3) và tạo ra tiếng nổ mạnh, gọi là tiếng nổ siêu thanh. Những người trên mặt đất nếu nghe thấy tiếng nổ này cùng một thời điểm thì vị trí của họ cùng thuộc một đường hypebol. Hãy giải thích điều này.

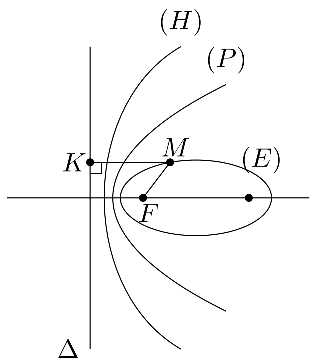
Hình 3

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

2 Xác định đường conic theo tâm sai, tiêu điểm và đường chuẩn

Rèn luyện 3:

Cho đường conic có tiêu điểm F, đường chuẩn Δ và một điểm M là điểm nằm trên đường conic đó. Tìm mối liên hệ giữa tỉ số $\dfrac{MF}{\mathrm{d}(M;\Delta)}$ và tên gọi của đường conic.



....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Định nghĩa (Định nghĩa chung của các đường conic). Cho điểm F cố định và đường thẳng Δ cố định không đi qua F. Tập hợp các điểm M sao cho tỉ số $\dfrac{MF}{\mathrm{d}(M,\Delta)}$ bằng một hằng số dương e cho trước được gọi là đường conic. Điểm F gọi là tiêu điểm, Δ gọi là đường chuẩn và e gọi là tâm sai của đường conic.

Từ định nghĩa trên, kết hợp với tính chất của elip, parabol và hypebol, ta có:

Định nghĩa.

- Elip là đường conic có tâm sai $e < 1$;
- Parabol là đường conic có tâm sai $e = 1$;
- Hypebol là đường conic có tâm sai $e > 1$.

Ví dụ 2: Xác định tâm sai, toạ độ một tiêu điểm và phương trình đường chuẩn tương ứng của mỗi đường conic sau:

a) $y^2 = 14x$; **b)** $\dfrac{x^2}{10} + \dfrac{y^2}{5} = 1$; **c)** $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{12} = 1$.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 3: Cho đường thẳng $\Delta : x + y - 1 = 0$. Gọi tên và lập phương trình của các đường (L) là tập hợp các điểm $M(x; y)$ thoả mãn $\dfrac{MO}{\mathrm{d}(M, \Delta)} = e$ trong mỗi trường hợp sau:

a) $e = \dfrac{1}{2}$; **b)** $e = 2$; **c)** $e = 1$.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Rèn luyện 4: Xác định tâm sai, toạ độ một tiêu điểm và phương trình đường chuẩn tương ứng của mỗi đường conic sau:

a) $\dfrac{x^2}{5} + \dfrac{y^2}{2} = 1$; **b)** $\dfrac{x^2}{12} - \dfrac{y^2}{4} = 1$; **c)** $y^2 = \dfrac{1}{2}x$.

....
....
....
....

....
....
....
....
....
....

Rèn luyện 5: Quỹ đạo của các vật thể sau đây là những đường conic. Những đường này là elip, parabol hay hypebol?

Tên	**Tâm sai**
Trái Đất	0,0167
Sao chổi Halley	0,9671
Sao chổi Great Southern of 1887	1,0
Vật thể Oumuamua	1,2

Hình 5. Vật thể Oumuamua
Nguồn: http://vi.wikipedia.org/wiki/oumuamua

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

B BÀI TẬP

Bài 1: Xác định tâm sai, toạ độ một tiêu điểm và phương trình đường chuẩn tương ứng của mỗi đường conic sau:

a) $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{7}=1$; **b)** $\dfrac{x^2}{15}-\dfrac{y^2}{10}=1$; **c)** $y^2=x$.

....
....
....
....
....
....

....
....
....
....

Bài 2: Viết phương trình của conic có tâm sai $e = 1$, tiêu điểm $F(1;0)$ và đường chuẩn $\Delta : x + 1 = 0$.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Bài 3: Viết phương trình của conic (C) trong mỗi trường hợp sau:

a) (C) có tiêu điểm $F(8;0)$, đường chuẩn $\Delta : x - 2 = 0$ và tâm sai $e = 2$;

b) (C) có tiêu điểm $F(-4;0)$, đường chuẩn $\Delta : x + \dfrac{25}{4} = 0$ và tâm sai $e = \dfrac{4}{5}$.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Bài 4: Quỹ đạo của các vật thể sau đây là những đường conic. Những đường này là elip, parabol hay hypebol?

Tên	**Tâm sai**
Sao Hoả	0,0934
Mặt Trăng	0,0549
Sao Thuỷ	0,2056
Sao chổi Ikeya-Seki	0,9999
C/2019 Q4	3,5

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Bài 5: Cho hình chữ nhật $ABCD$ với bốn đỉnh $A(-4;3), B(4;3), C(4;-3), D(-4;-3)$.

a) Viết phương trình chính tắc của elip nhận $ABCD$ là hình chữ nhật cơ sở. Vẽ elip đó.

b) Viết phương trình chính tắc của hypebol nhận $ABCD$ là hình chữ nhật cơ sở. Vẽ hypebol đó.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Bài 6: Các đường conic có phương trình như sau là đường elip hay hypebol? Tìm độ dài các trục, toạ độ tiêu điểm, tiêu cự, tâm sai của các đường conic đó.

a) $\dfrac{x^2}{100}+\dfrac{y^2}{64}=1$;

b) $\dfrac{x^2}{36}-\dfrac{y^2}{64}=1$.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Bài 7: Cho parabol có phương trình chính tắc $y^2=2x$. Tìm tiêu điểm, phương trình đường chuẩn của parabol và vẽ parabol đó.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Bài 8: Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho đường thẳng $\Delta\colon x=-5$ và điểm $F(-4;0)$. Cho ba điểm $A(-3;1), B(2;8), C(0;3)$.

a) Tính các tỉ số sau: $\dfrac{AF}{\mathrm{d}(A,\Delta)}, \dfrac{BF}{\mathrm{d}(B,\Delta)}, \dfrac{CF}{\mathrm{d}(C,\Delta)}$.

b) Hỏi mỗi điểm A, B, C lần lượt nằm trên loại đường conic nào nhận F là tiêu điểm và Δ là đường chuẩn ứng với tiêu điểm đó?

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

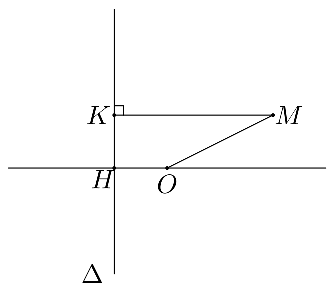
Bài 9: Vệ tinh nhân tạo đầu tiên được Liên Xô (cũ) phóng từ Trái Đất năm 1957. Quỹ đạo của vệ tinh đó là một đường elip nhận tâm Trái Đât là một tiêu điểm. Người ta đo được vệ tinh cách bề mặt Trái Đất gần nhất là 583 dặm và xa nhất là 1342 dặm (1 dặm xấp xỉ $1,609$ km). Tìm tâm sai của quỹ đạo đó, biết bán kính của Trái Đất xấp xỉ 4000 dặm.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Bài 10: Sao Diêm Vương chuyển động xung quanh Mặt Trời theo quỹ đạo là một đường elip có một trong hai tiêu điểm là tâm của Mặt Trời. Biết elip này có bán trục lớn $a \approx 5,906 \cdot 10^6$ km và tâm sai $e \approx 0,249$. (Nguồn: hrefhttps://vi.wikipedia.orghttps://vi.wikipedia.org)
Tìm khoảng cách nhỏ nhất (gần đúng) giữa Sao Diêm Vương và Mặt Trời.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Bài 11:
Cho đường thẳng Δ và điểm O sao cho khoảng cách từ O đến Δ là $OH = 1$. Với mỗi điểm M di động trong mặt phẳng, gọi K là hình chiếu vuông góc của M lên Δ. Chứng minh tập hợp các điểm M trong mặt phẳng sao cho $MK^2 - MO^2 = 1$ là một đường parabol.



Bài 12: Viết phương trình các đường chuẩn của các đường conic sau:

a) $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$ **b)** $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{4}=1$ **c)** $y^2=8x$

Bài 13: Cho hai elip $(E_1): \dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$ và $(E_2): \dfrac{x^2}{100}+\dfrac{y^2}{64}=1$.

a) Tìm mối quan hệ giữa hai tâm sai của các elip đó.

b) Chứng minh rằng với mỗi điểm M thuộc elip (E_2) thì trung điểm N của đoạn thẳng OM thuộc elip (E_1).

Bài 14: Viết phương trình của đường conic có tâm sai bằng 1, tiêu điểm $F(2;0)$ và đường chuẩn là $\Delta\colon x+2=0$.

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

Bài 15: Quỹ đạo chuyển động của sao chổi Halley là một elip, nhận tâm Mặt Trời là một tiêu điểm, có tâm sai bằng $0,967$.

a) Giải thích vì sao ta có thể coi bất kì hình vẽ elip nào với tâm sai bằng 0,967 là hình ảnh thu nhỏ của quỹ đạo sao chổi Halley.

b) Biết khoảng cách gần nhất từ sao chổi Halley đến tâm Mặt Trời là khoảng $88 \cdot 10^6$ km, tính khoảng cách xa nhất (Theo:

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

C Bài tập

Bài 1: Tìm tọa độ các đỉnh, tiêu điểm và bán kính qua tiêu ứng với điểm $M(x;y)$ của các cônic sau:

a) $\dfrac{x^2}{169} + \dfrac{y^2}{144} = 1;$ **b)** $\dfrac{x^2}{25} - \dfrac{y^2}{144} = 1;$ **c)** $y^2 = 11x.$

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

Bài 2: Cho Elip $(E)\colon \dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1.$

a) Xác định tọa độ các đỉnh, tiêu điểm và tìm tâm sai của (E).

b) Viết phương trình chính tắc của parabol (P) có tiêu điểm là tiêu điểm có hoành độ dương của (E).

c) Viết phương trình chính tắc của hypebol (H) có hai đỉnh là hai tiêu điểm của (E), hai tiêu điểm là hai đỉnh của (E). Tìm tâm sai của (H).

Bài 3: Xác định tâm sai, tiêu điểm và đường chuẩn tương ứng của mỗi đường cônic sau:

a) $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{12}=1.$ **b)** $\dfrac{x^2}{14}-\dfrac{y^2}{2}=1.$ **c)** $y^2=7x.$

Bài 4: Cho đường thẳng $d\colon x+y-1=0$ và điểm $F(1;1)$. Viết phương trình đường cônic nhận F làm tiêu điểm, d là đường chuẩn và có tâm sai e trong mỗi trường hợp sau:

a) $e=\dfrac{1}{2}$; **b)** $e=1$; **c)** $e=2$.

Bài 5:

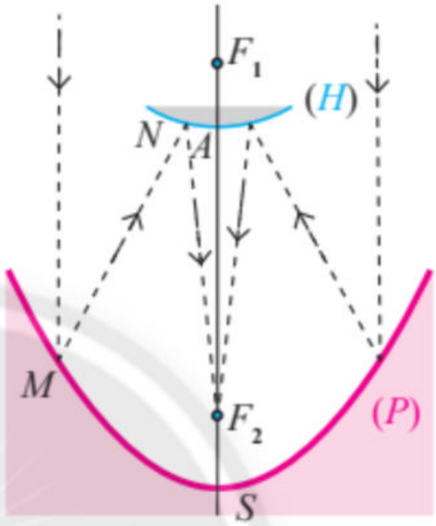
Mặt Trăng chuyển động theo một quỹ đạo là đường elip có tâm sai bằng 0,0549 và nhận tâm Trái Đất là một tiêu điểm. Biết khoảng cách gần nhất giữa tâm Trái Đất và tâm Mặt Trăng là 362 600km. Tính khoảng cách xa nhất giữa tâm Trái Đất và tâm Mặt Trăng.
Nguồn: https://www.universetoday.com

Hình 1. Trái Đất và Mặt Trăng

....
....
....
....
....
....
....

Bài 6: Ta đã biết tính chất quang học của ba đường cônic (xem phần đọc thêm Bạn có biết? ở trang 72, sách giáo khoa Toán 10, tập hai). Hypebol cũng có tính chất quang học tương tự như elip: Tia sáng hướng tới tiêu điểm F_1 của hypebol (H) khi gặp một nhánh của (H) sẽ cho tia phản xạ đi qua F_2.
Một nhà nghiên cứu thiết kế một kính thiên văn vô tuyến chứa hai gương có mặt cắt hình parabol (P) và hình một nhánh của hypebol (H). Parabol (P) có tiêu điểm F_1 và đỉnh S. Hypebol (H) có đỉnh A, có chung một tiêu điểm là F_1 với (P) và còn có tiêu điểm thứ hai F_2 (Hình 3).
Nguyên tắc hoạt động của kinh thiên văn đó như sau: Tín hiệu đến từ vũ trụ được xem như song song với trục của parabol (P), khi đến điểm M của (P) sẽ cho tia phản xạ theo hướng MF_1, tia này gặp (H) tại điểm N và cho tia phản xạ tới F_2 là nơi thu tín hiệu. Cho biết $SF_1 = 14$m, $SF_2 = 2$m và $AF_1 = 1$m. Hãy viết phương trình chính tắc của (P) và (H).
(*Nguồn:* https://sciencestruck.com/parabolic-mirror-working-principle-applications)

Hình 2



Hình 3

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Bài 7:

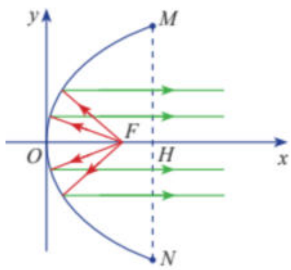
Mặt cắt của một chảo ăng-ten là một phần của parabol (P). Cho biết đầu thu tín hiệu đặt tại tiêu điểm F cách đỉnh O của chảo một khoảng là $\dfrac{1}{6}$m.


Hình 4

a) Viết phương trình chính tắc của (P).

b) Tính khoảng cách từ một điểm $M(0{,}06; 0{,}2)$ trên ăng-ten đến F.

Bài 8:
Gương phản chiếu của một đèn chiếu có mặt cắt hình parabol (Hình 5). Chiều rộng giữa hai mép vành của gương là $MN = 32$cm và chiều sâu của gương là $OH = 24$cm.



Hình 5

a) Viết phương trình chính tắc của parabol đó.

b) Biết bóng đèn đặt tại tiêu điểm F của gương. Tính khoảng cách từ bóng đèn tới đỉnh O của gương.

Bài 1: Cho conic (S) có tâm sai $e = 2$, một tiêu điểm $F(-2; 5)$ và đường chuẩn tương ứng với tiêu điểm đó là $\Delta\colon x + y - 1 = 0$. Chứng minh rằng, điểm $M(x; y)$ thuộc đường conic (S) khi và chỉ khi $x^2 + y^2 + 4xy - 8x + 6y - 23 = 0$ (được gọi là phương trình của (S), tuy vậy không phải là phương trình chính tắc). Hỏi (S) là đường gì trong ba đường conic?

Bài 2: Viết phương trình đường conic có tâm sai $e = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, một tiêu điểm $F(-1;\,0)$ và đường chuẩn tương ứng là $\Delta\colon x + y + 1 = 0$. Cho biết conic đó là đường gì?

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Bài 3: Chứng minh rằng đồ thị của hàm số $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ là một parabol có tiêu điểm là $F\left(-\dfrac{b}{2a}; \dfrac{1-\Delta}{4a}\right)$ và đường chuẩn là $\Delta : y = -\dfrac{1+\Delta}{4a}$, trong đó $\Delta = b^2 - 4ac$.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Bài 4: Cho hai parabol có phương trình $y^2 = 2px$ và $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$. Chứng minh rằng nếu hai parabol đó cắt nhau tại bốn điểm phân biệt thì bốn điểm đó cùng nằm trên đường tròn $(C)\colon x^2 + y^2 + \left(\dfrac{b}{a} - 2p\right)x - \dfrac{1}{a}y + \dfrac{c}{a} = 0$.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

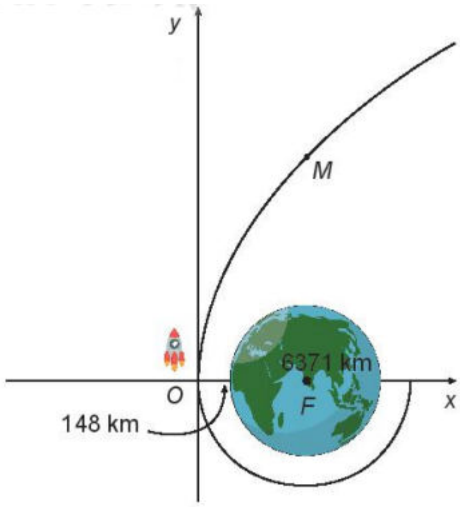
Bài 5: Cho elip có phương trình $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1$. Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm $M(2;1)$ và cắt elip tại hai điểm A, B sao cho $MA = MB$.

....
....
....
....
....
....
....

. . . .
. . . .
. . . .

Bài 6:

Một tàu vũ trụ nằm trong một quỹ đạo tròn và ở độ cao 148 km so với bề mặt Trái Đất. Sau khi đạt được vận tốc cần thiết để thoát khỏi lực hấp dẫn của Trái Đất, tàu vũ trụ sẽ đi theo quỹ đạo parabol với tâm Trái Đất là tiêu điểm; điểm khởi đầu của quỹ đạo này là đỉnh parabol quỹ đạo.



a) Viết phương trình chính tắc của parabol quỹ đạo (1 đơn vị đo trên mặt phẳng toạ độ ứng với 1 km trên thực tế, lấy bán kính Trái Đất là 6 371 km).

b) Giải thích vì sao, kể từ khi đi vào quỹ đạo parabol, càng ngày, tàu vũ trụ càng cách xa Trái Đất.

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .